

ФАХОВИЙ КОЛЕДЖ РАКЕТНО-КОСМІЧНОГО МАШИНОБУДУВАННЯ
ДНІПРОВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ імені ОЛЕСЯ ГОНЧАРА

МЕТОДИЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ЛЕКЦІЙНИХ ЗАНЯТЬ

дисципліна «Математичний аналіз»
спеціальність 121 Інженерія програмного забезпечення
освітньо-професійна програма Розробка програмного забезпечення

Дніпро

2023

Лекція

з навчальної дисципліни Математичний аналіз

Тема Комплексні числа і дії над ними.

Мета заняття ознайомити студентів з поняттям комплексного числа, сформулювати вміння виконувати дії над комплексними числами у алгебраїчній формі.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

опорний конспект

Час – 2 години

План проведення лекції

Структура лекції	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв	Включає в себе: <i>привітання, визначення присутності студентів на занятті</i>
2 Актуалізація опорних знань, перевірка вивченого матеріалу та мотивація навчальної діяльності студентів	10 хв	Включає в себе: <i>вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, перевірку попереднього матеріалу, формулювання мети лекції, огляд головних питань теми</i>
3 Основна частина (викладення навчальних питань лекції)	55 хв	Головне місце приділяється <i>викладенню основного змісту матеріалу теми, його аналізу, узагальненню висунутих положень.</i>
4 Заключна частина Домашнє завдання: [4], с. 63...66 [1], с. 342	10 хв	Включає в себе: <i>узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого на лекції матеріалу</i>

Література

1. Дубовик, В.П. Вища математика:[Текст] / В.П.Дубовик, І.І.Юрик.– К.: Ігнатекс-Україна, 2013. – 648 с.

4. Денисюк, В. П. Вища математика:[Текст] навч. посібник у 4-х ч./ В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч. 2. – 275 с.

Навчальні матеріали лекції

Основні поняття комплексних чисел

Комплексним числом z називається вираз $z = a + bi$, де a і b - дійсні числа, а i - уявна одиниця, яка визначається рівністю $i = \sqrt{-1}$ або $i^2 = -1$; де a називається дійсною частиною, b – уявною частиною числа z . Їх позначають так:

$$a = \operatorname{Re} z, \quad b = \operatorname{Im} z.$$

Якщо $a = 0$, то число $0 + bi = bi$ називається суто уявним; якщо $b = 0$, то отримаємо дійсне число: $a + 0i = a$.

Два комплексних числа $z = a + bi$ та $\bar{z} = a - bi$, у яких відрізняються тільки знаки уявної частини називаються спряженими.

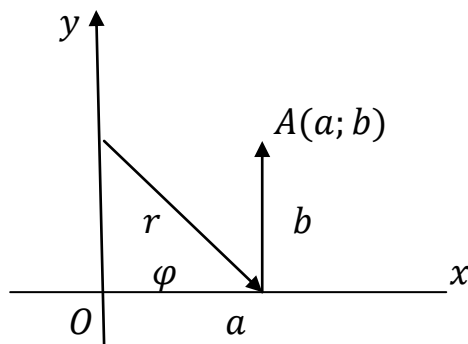
Приймаються два основних визначення:

1. Два комплексних числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ та $z_2 = a_2 + b_2 i$ вважаються рівними $z_1 = z_2$, якщо $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, тобто якщо рівні окремо їх дійсні та уявні частини.

2. Комплексне число z дорівнює нулю: $z = a + bi = 0$, тоді і тільки тоді, коли $a = 0$, $b = 0$.

Геометричне зображення комплексних чисел.

Довільне комплексне число $z = a + bi$ можна зобразити на площині Oxy у вигляді точки $A(a; b)$ з координатами a і b . Навпаки, кожній точці площини $M(x; y)$ відповідає комплексне число $z = x + yi$. Площина, на якій зображені комплексні числа, називається площиною комплексної змінної z (рис.1)



Вісь Oy називають віссю уявних чисел або уявною віссю, а вісь Ox - дійсною віссю.

Якщо поєднаємо точку $A(a; b)$ з початком координат, отримаємо вектор $\overline{OA}$. У деяких випадках зручно вважати геометричним зображенням комплексного числа $z = a + bi$ вектор $\overline{OA}$.

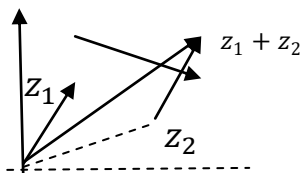
Модулем комплексного числа $z = a + bi$ (позначення $|z|$) називають довжину вектора OA , тобто $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Додавання комплексних чисел.

Сумою двох комплексних чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ та $z_2 = a_2 + b_2 i$ називається комплексне число, яке визначено рівністю

$$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i$$

Геометрично це виглядає так:



Віднімання комплексних чисел.

Різницею двох комплексних чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ та $z_2 = a_2 + b_2 i$ називається таке комплексне число, яке при додаванні з числом z_2 дає число z_1 :

$$z_1 - z_2 = (a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) i$$

Зауважимо, що модуль різниці двох комплексних чисел дорівнює відстані між точками, які зображають ці числа на площині комплексної змінної:

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}$$

Множення комплексних чисел.

Добутком комплексних чисел $z_1 = a_1 + b_1i$ та $z_2 = a_2 + b_2i$ називається таке комплексне число, яке отримуємо, якщо перемножимо ці числа як двочлени за правилами алгебри, маючи на увазі, що $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$ і т. д.

На основі цього правила отримуємо:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1i) \cdot (a_2 + b_2i) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (b_1a_2 + a_1b_2)i$$

Ділення комплексних чисел.

Ділення комплексних чисел визначається як дія, обернена множенню.

Нехай $z_1 = a_1 + b_1i$, $z_2 = a_2 + b_2i$, $|z_2| = \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \neq 0$. Тоді $\frac{z_1}{z_2} = z$ є таке комплексне число, що $z_1 = z_2 z$. Якщо

$$\frac{a_1 + b_1i}{a_2 + b_2i} = x + yi$$

то
$$z = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}i.$$

Практично ділення комплексних чисел виконується наступним чином: щоб поділити $z_1 = a_1 + b_1i$ на $z_2 = a_2 + b_2i$, множимо чисельник і знаменник на комплексне число, яке спряжене знаменнику (тобто на $a_2 - b_2i$).

Алгебраїчна форма комплексного числа

Форму запису комплексного числа $z = a + bi$ називають алгебраїчною.

Дії над комплексними числами $z_1 = a_1 + b_1i$ і $z_2 = a_2 + b_2i$ в алгебраїчній формі виконують за такими правилами:

1. Додавання $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$
2. Віднімання $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$
3. Множення $z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$
4. Ділення ($z_2 \neq 0$)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

де $\bar{z}_2 = a_2 - b_2i$ - комплексно спряжене число до числа $z_2 = a_2 + b_2i$

Приклад.

1. Знайти $(3 + 5i) \cdot (4 - i)$

$$(3 + 5i) \cdot (4 - i) = 12 - 3i + 20i - 5i^2 = 12 + 17i + 5 = 17 + 17i.$$

2. Знайти $\frac{3-i}{4+5i}$

$$\frac{3-i}{4+5i} = \frac{(3-i)(4-5i)}{(4+5i)(4-5i)} = \frac{12-15i-4i+5i^2}{16-25i^2} = \frac{12-19i-5}{16+25} = \frac{7-19i}{41} = \frac{7}{41} - \frac{19}{41}i$$

3. Знайти дійсну і уявну частину комплексного числа $z = \frac{2-i}{i+2} + (i-1)^4$

$$\frac{2-i}{i+2} + (i-1)^4 = \frac{(2-i)(i-2)}{(i+2)(i-2)} + (i-1)^2(i-1)^2 = \frac{2i-4-i^2+2i}{i^2-4} + (i^2-2i+1)^2 =$$

$$\frac{4i-3}{-5} + (-2i)^2 = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i - 4 = -\frac{17}{5} - \frac{4}{5}i.$$

Відповідь: $Re\ z = -\frac{17}{5}$, $Im\ z = -\frac{4}{5}$.

Питання та завдання до контролю знань студентів

1. Дайте означення комплексного числа.
2. Яку форму комплексного числа називають алгебраїчною?
3. Що таке аргумент комплексного числа?
4. Дайте означення комплексно спряженого числа.
5. Коли комплексне число дорівнює нулю?

Домашнє завдання: [1] с. 63...66

Лекція

з навчальної дисципліни Математичний аналіз

Тема Піднесення комплексного числа до степеня. Тригонометрична форма комплексного числа.

Мета заняття ознайомити студентів з тригонометричною формою комплексного числа, сформулювати вміння виконувати дії над комплексними числами у тригонометричній формі.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН
опорний конспект

Час – 2 години

План проведення лекції

Структура лекції	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв	Включає в себе: <i>привітання, визначення присутності студентів на занятті</i>
2 Актуалізація опорних знань, перевірка вивченого матеріалу та мотивація навчальної діяльності студентів	10 хв	Включає в себе: <i>вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, перевірку попереднього матеріалу, формулювання мети лекції, огляд головних питань теми</i>
3 Основна частина (викладення навчальних питань лекції)	55 хв	Головне місце приділяється викладенню основного змісту матеріалу теми, його аналізу, узагальненню висунутих положень.
4 Заключна частина Домашнє завдання:	10 хв	Включає в себе: <i>узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого на</i>

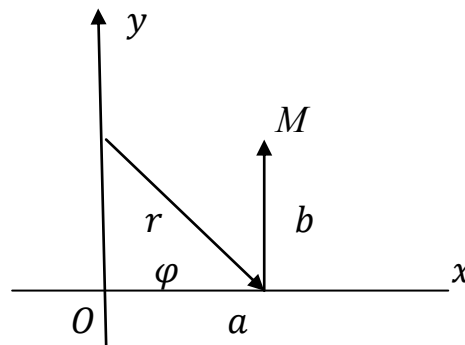
Література

4. Денисюк, В. П. Вища математика:[Текст] навч. посібник у 4-х ч./ В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч. 2. – 275 с.

Навчальні матеріали лекції

Аргумент комплексного числа

Аргументом числа $z = a + bi$ називають кут, на який треба повернути навколо початку координат частину дійсної осі до збігу з вектором OA : $\varphi = \operatorname{Arg} z$ (так позначається). При цьому кут φ вважають додатним, якщо обертання додатної частини дійсної осі відбувається проти ходу годинникової стрілки, і від'ємним - у протилежному напрямі.



Для комплексного числа $z = 0$ аргумент не визначений.

Якщо $z \neq 0$, то $\operatorname{Arg} z$ визначається не однозначно, а з точністю до сталого доданка $2\pi k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$). Одне і тільки одне значення φ аргументу z належить проміжку $(-\pi; \pi]$, його називають *головним значенням* і позначають $\arg z$: $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k$.

Аргумент комплексного числа $z = a + bi$ записується так $\varphi = \arg z$ або $\varphi = \arg(a + bi)$

Із означення тригонометричних функцій витікає, що

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a}{|z|}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{b}{|z|}$$

Щоб знайти аргумент числа $z = a + bi$ треба:

1. Визначити в якій чверті знаходиться точка $z = a + bi$.
2. Знайти в цій чверті кут φ , розв'язавши рівняння $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$
3. Знайти всі значення аргументу за формулою $\operatorname{Arg} z = \varphi + 2\pi k$

Для обчислення головного значення аргументу використовують формулу:

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} \arctg(b/a), & \text{якщо } a > 0 \\ \arctg(b/a) + \pi, & \text{якщо } a < 0, b \geq 0 \\ \arctg(b/a) - \pi, & \text{якщо } a < 0, b < 0 \\ \pi/2, & \text{якщо } a = 0, b > 0 \\ -\pi/2, & \text{якщо } a = 0, b < 0 \end{cases}$$

Тригонометрична форма комплексного числа

Нехай $r = |z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$ - це модуль комплексного числа, $\varphi = \arg(a + bi)$ - це одне значення аргументу комплексного числа. Із відношень $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a}{|z|}$ $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{b}{|z|}$, випливає, що $a = r \cos \varphi$ і $b = r \sin \varphi$, тоді $z = a + bi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ - називається *тригонометричною формою* комплексного числа. Таким чином, будь-яке комплексне число $a + bi \neq 0$ можна записати в тригонометричній формі.

Дії над комплексними числами в тригонометричній формі

Нехай задано два комплексних числа: $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ і $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$:

1. Добуток

$$z_1 z_2 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

2. Ділення

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

3. Для піднесення до n -го степеня використовується формула Муавра

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi), n \in \mathbb{Z}$$

4. Здобуття кореня n -го степеня з комплексного числа

$$z_k = \sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \text{ де } \sqrt[n]{r} - \text{арифметичний корінь,}$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Геометрично ці n значень виразу $\sqrt[n]{z}$ зображуються вершинами деякого правильного n -кутника, вписаного в коло з радіусом $\sqrt[n]{|z|}$ з центром у початку координат.

Приклад.

1. Записати у тригонометричній формі наступні комплексні числа:

а) $z = 2$.

Розв'язання: за умовою $a = 2$ і $b = 0$, тоді $r = \sqrt{2^2 + 0^2} = 2$

$$\varphi = \arctg \frac{0}{2} = 0 \text{ і за формулою } z = a + bi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \text{ отримаємо}$$

тригонометричну форму $z = 2 = 2(\cos 0 + i \sin 0)$.

б) $z = 6i$.

Розв'язання: за умовою $a = 0$ і $b = 6$, тоді $r = \sqrt{0^2 + 6^2} = 6$

$$\varphi = \arctg \frac{6}{0} = \frac{\pi}{2} \text{ і отримаємо } z = 6i = 6\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right).$$

в) $z = -2 + 2\sqrt{3}i$.

Розв'язання: за умовою $a = -2$ і $b = 2\sqrt{3}$, тоді

$$r = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$$

і головне значення аргументу

$$\varphi = \arctg \frac{2\sqrt{3}}{-2} = \arctg(-\sqrt{3}) = \pi + \arctg \sqrt{3} = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}, \text{ отримаємо}$$

$$z = -2 + 2\sqrt{3}i = 4(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}).$$

2. Записати в алгебраїчній формі:

а) $z = 2(\cos 2\pi + i \sin 2\pi)$

Розв'язання: так як $\cos 2\pi = 1$ і $\sin 2\pi = 0$, тоді отримаємо $z = 2(1 + i \cdot 0) = 2$.

б) $z = \sqrt{2}(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4})$

Розв'язання: так як $\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ і $\sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ тоді отримаємо $z = \sqrt{2}(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}) = -1 + i$.

3. Знайти добуток

$$\begin{aligned} 2(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}) \cdot 3(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}) &= 2 \cdot 3(\cos(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12}) + i \sin(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12})) = \\ &= 6(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) = 6(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}) = 3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2}. \end{aligned}$$

4. Виконати ділення

$$\begin{aligned} 10(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}) : 2(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) &= \frac{10}{2}(\cos(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}) + i \sin(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4})) = \\ &= 5(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}) = 5(0 + i) = 5i \end{aligned}$$

5. Піднести до степеня:

а) $(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})^6$

Розв'язання: за формулою Муавра отримаємо

$$(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})^6 = \cos 6 \cdot \frac{\pi}{6} + i \sin 6 \cdot \frac{\pi}{6} = \cos \pi + i \sin \pi = -1 + i \cdot 0 = -1$$

б) $[\frac{3}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}]^{10}$.

Розв'язання: спочатку запишемо це комплексне число в тригонометричній формі :

$$a = \frac{3}{2} \text{ і } b = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ і } r = \sqrt{(\frac{3}{2})^2 + (-\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \sqrt{3}, \text{ і } \varphi = \arctg(-\frac{\sqrt{3}}{2}) : (\frac{3}{2}) = \arctg(-\frac{\sqrt{3}}{3}) = -\frac{\pi}{6}, \text{ тоді}$$

$$\frac{3}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} (\cos(-\frac{\pi}{6}) + i \sin(-\frac{\pi}{6})), \text{ таким чином}$$

$$[\sqrt{3}(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i \sin(-\frac{\pi}{6}))]^{10} = 3^5 [\cos(-10 \cdot \frac{\pi}{6}) + i \sin(-10 \cdot \frac{\pi}{6})] =$$

$$= 3^5 (\cos \frac{5\pi}{3} - i \sin \frac{5\pi}{3}) = 3^5 (\cos(\frac{5\pi}{3} - 2\pi) - i \sin(\frac{5\pi}{3} - 2\pi)) =$$

$$= 243 (\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}) = 243 (\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}) = 121,5(1 + i\sqrt{3})$$

6. Обчислити корінь з комплексного числа $\sqrt[3]{i}$

Розв'язання: спочатку число $z = i$ запишемо в тригонометричній формі

$$i = 0 + 1 \cdot i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}, \text{ тоді } z_k = \sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}} =$$

$$= \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi\kappa}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi\kappa}{3} = \cos(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi\kappa}{3}) + i \sin(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi\kappa}{3}), \kappa = 0, 1, 2$$

Якщо $\kappa = 0$, то $z_0 = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}$

$$\kappa = 1, \text{TO } z_1 = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\frac{5\pi}{6} + i \sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$\kappa = 2, \text{TO } z_2 = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right) = \cos\frac{3\pi}{2} + i \sin\frac{3\pi}{2} = -i$$

Питання та завдання до контролю знань студентів

1. Дайте означення тригонометричної форми комплексного числа.
2. Назвіть формулу Муавра.
3. Які дії можна виконувати над комплексними числами у тригонометричній формі?

Домашнє завдання: [1] с. 66...67

Лекція

з навчальної дисципліни Математичний аналіз

Тема Границя функції в точці. Односторонні границі.

Мета заняття ознайомити студентів з поняттям границі функції, правилом обчислення границь функції, сформулювати вміння використовувати першу і другу важливі границі для розв'язування прикладів

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН
опорний конспект

Час – 2 години

План проведення лекції

Структура лекції	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв	Включає в себе: <i>привітання, визначення присутності студентів на занятті</i>
2 Актуалізація опорних знань, перевірка вивченого матеріалу та мотивація навчальної діяльності студентів	10 хв	Включає в себе: <i>вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, перевірку попереднього матеріалу, формулювання мети лекції, огляд головних питань теми</i>
3 Основна частина (викладення навчальних питань лекції)	55 хв	Головне місце приділяється викладенню основного змісту матеріалу теми, його аналізу, узагальненню висунутих положень.
4 Заключна частина Домашнє завдання: [3], с. 175...177 [6], с. 205 [1], с. 49	10 хв	Включає в себе: <i>узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого на лекції матеріалу</i>

Література

1. Дубовик, В.П. Вища математика:[Текст] / В.П.Дубовик, І.І.Юрик.– К.: Ігнатекс-Україна, 2013. – 648 с.
3. Денисюк, В. П. Вища математика:[Текст] навч. посібник у 4-х ч./ В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч. 1. – 295 с.
6. Макаренко В. О. Вища математика для економістів [Текст] : навч. посіб / В. О. Макаренко. – К.: Знання, 2008. – 517 с.

Навчальні матеріали лекції

Границя функції в точці

У всіх означеннях будемо припускати що точка x_0 є граничною точкою множини X . (області визначення функції $f(x)$), тобто така, що в довільному околі якої є точки множини X , відмінні від x_0 .

Означення (по Коші). Число a називається границею функції $f(x)$ в точці x_0 , якщо для будь якого $\varepsilon > 0$ можна знайти $\delta(\varepsilon) > 0$, таке що для всіх x , які задовольняють нерівність $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$, виконується нерівність $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Твердження про те, що a - границя функції $f(x)$ у точці x_0 можна записати так:
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a.$$

Наведено інше означення, еквівалентне попередньому.

Означення (за Гейне). Число A називається границею функції $f(x)$ в точці x_0 , якщо для будь якої збіжної до x_0 послідовності (x_n) усі елементи якої відмінні від x_0 , відповідна послідовність значень функції $\{f(x_n)\}$ збігається до числа A .

Зауваження. Знаходження границі функції безпосередньо на підставі означення досить складне завдання. На практиці користуються теоремами, які впливають з означення границі функції за Гейне і основних властивостей збіжних послідовностей, наведених вище.

Покажемо, що означення границі по Коші (в термінах « ε , δ ») і по Гейне (в термінах збіжних послідовностей) еквівалентні. Нехай число A є границя $f(x)$ у точці x_0 за першим означенням, тобто для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta(\varepsilon) > 0$ таке, що з нерівності $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ випливає нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Вибираємо збіжну до x_0 послідовність (x_n) , тобто для $\delta(\varepsilon) > 0$ існує $N(\delta)$, що для будь-якого $n > N(\varepsilon)$ виконується нерівність $|x_n - x_0| < \delta(\varepsilon)$. Але при виконанні останньої нерівності виконується умова $|f(x_n) - A| < \varepsilon$, тобто послідовність $f(x_n)$ має границю – число A . Маємо: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

Доведемо тепер обернене твердження: якщо число A є границею функції $y = f(x)$ у точці x_0 за другим означенням, то A є границею $f(x)$ за першим означенням.

Доведення проведемо методом від супротивного.

Припустимо, що A не є границею функції $f(x)$ за першим означенням. Тоді існує $\varepsilon_0 > 0$ таке, що при будь-якому $\delta > 0$ знайдеться хоча б одне число x_1 із околу точки x_0 , що при виконанні умови $0 < |x_1 - x_0| < \delta$ нерівність $|f(x_1) - A| < \varepsilon_0$ все таки не виконується, тобто виконується нерівність $|f(x_1) - A| \geq \varepsilon_0$. Візьмемо послідовність чисел $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0, \dots, \delta_n > 0, \dots$ яка збігається до нуля, наприклад, послідовність $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$. Тоді для кожного значення δ_n існуватимуть відповідно точки x_n , які задовольняють нерівності $0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n}$, але виконується умова $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0$. Легко бачити, що із нерівності $0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n}$, яка виконується для всіх n , $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ ($x_n \neq x_0$). Отже, згідно з другим означенням границі $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ починаючи з деякого номера повинна виконуватись нерівність $|f(x_n) - A| < \varepsilon_0$, що суперечить умові $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0$. Отже, наше припущення, що число A не є границею функції $f(x)$ за першим означенням не вірне. Число A буде границею функції $f(x)$ за першим означенням

Односторонні границі

У означенні границі функції вважається, що x прямує до x_0 будь-яким способом: може бути меншим від x_0 , більшим від нього, або коливатись навколо точки x_0 . Але бувають випадки, коли спосіб наближення аргументу x до x_0 суттєво впливає на значення границі функції. Тому вводять поняття односторонніх границь.

Означення. Число a називається границею функції $f(x)$ в точці x_0 зліва, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна знайти $\delta(\varepsilon) > 0$, таке що для всіх x , які задовольняють нерівність $0 < x_0 - x < \delta(\varepsilon)$, виконується нерівність $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Твердження про те, що a - границя функції $f(x)$ у точці x_0 зліва можна записати так: $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = a$.

Означення. Число a називається границею функції $f(x)$ в точці x_0 справа, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна знайти $\delta(\varepsilon) > 0$, таке що для всіх x , які задовольняють нерівність $0 < x - x_0 < \delta(\varepsilon)$, виконується нерівність $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Твердження про те, що a - границя функції $f(x)$ у точці x_0 справа можна записати так: $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = a$.

Питання та завдання до контролю знань студентів

1. Дайте означення границі функції.
2. Що таке границя функції зліва?

3. Що таке границя функції справа?

Домашнє завдання: [1], с. 175...177

Лекція

з навчальної дисципліни Математичний аналіз

Тема Основні властивості нескінченно малих і нескінченно великих величин. Основні теореми про границю.

Мета заняття ознайомити студентів з поняттям нескінченно малих і великих величин, правилом обчислення границь функції за допомогою цих величин, формувати вміння використовувати нескінченно великі і малі величини для розв'язування прикладів

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН
опорний конспект

Час – 2 години

План проведення лекції

Структура лекції	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв	Включає в себе: привітання, визначення присутності студентів на занятті
2 Актуалізація опорних знань, перевірка вивченого матеріалу та мотивація навчальної діяльності студентів	10 хв	Включає в себе: вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, перевірку попереднього матеріалу, формулювання мети лекції, огляд головних питань теми
3 Основна частина (викладення навчальних питань лекції)	55 хв	Головне місце приділяється викладенню основного змісту матеріалу теми, його аналізу, узагальненню висунутих положень.
4 Заключна частина Домашнє завдання: [3], с. 177...178, 182...184	10 хв	Включає в себе: узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого на лекції матеріалу

Література

3. Денисюк, В. П. Вища математика:[Текст] навч. посібник у 4-х ч./ В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч. 1. – 295 с.

Навчальні матеріали лекції

Означення. Функція $y = f(x)$ називається нескінченно малою функцією при $x \rightarrow x_0$, якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

Згідно означення границі функції дана рівність означає, що для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ знайдеться число $\delta(\varepsilon)$ таке, що для всіх x , які задовольняють нерівність $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ виконується умова $|f(x)| < \varepsilon$.

Аналогічно визначаються нескінченно малі функції при $x \rightarrow +\infty$; $x \rightarrow -\infty$; $x \rightarrow x_0 + 0$; $x \rightarrow x_0 - 0$. У всіх цих випадках $f(x) \rightarrow 0$.

Нескінченно малі функції називають нескінченно малими величинами або нескінченно малими та позначають, як правило, $\alpha(x)$, $\beta(x)$ і т.д.

Прикладами нескінченно малих функцій є функції $y = x^2$ при $x \rightarrow 0$, $y = x - 2$ при $x \rightarrow 2$, $y = \sin x$ при $x \rightarrow \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Якщо взяти до уваги означення границі функції за Гейне, то легко бачити, що всі теореми про нескінченно малі послідовності залишаються справедливими і для нескінченно малих функцій.

Порівняння нескінченно малих функцій

Як відомо, сума, різниця та добуток двох нескінченно малих функцій є функція нескінченно мала. Відношення ж двох нескінченно малих функцій може вести себе по різному: бути скінченим числом, бути нескінченно малою функцією або взагалі не прямувати ні до якої границі.

Дві нескінченно малі функції порівнюються між собою за допомогою їх відношення.

Нехай $\alpha = \alpha(x)$, $\beta = \beta(x)$ є нескінченно малі функції при $x \rightarrow x_0$, тобто $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) = 0$.

Означення. Нескінченно малі функції $\alpha(x)$, $\beta(x)$ в точці x_0 називаються нескінченно малими одного порядку, якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$; ($A \in \mathbb{R}$). В цьому випадку пишуть $\alpha(x) = O(\beta(x))$ (альфа дорівнює О-велике від бета).

Означення. Нескінченно малі функції $\alpha(x)$, $\beta(x)$ в точці x_0 називаються еквівалентними нескінченно малими при $x \rightarrow x_0$, якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$. В цьому випадку пишуть $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Означення. Нескінченно мала функція $\alpha(x)$ називається нескінченно малою більш високого порядку, ніж нескінченно мала величина $\beta(x)$, якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$ або $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \infty$. В цьому випадку пишуть $\alpha(x) = o(\beta(x))$ (альфа дорівнює о-мале від бета).

В цьому випадку нескінченно мала функція $\beta(x)$ називається нескінченно малою більш низького порядку, ніж нескінченно мала величина $\alpha(x)$.

Означення. Нескінченно малі функції $\alpha(x), \beta(x)$ в точці x_0 називаються непорівнюючими нескінченно малими, якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ не існує.

Приклад. Порівняти порядок функцій $\alpha(x) = 3x^2$ та $\beta(x) = 14x^2$ при $x \rightarrow 0$.

Розв'язування. Легко бачити, що при $x \rightarrow 0$ функції $\alpha(x) = 3x^2$ та $\beta(x) = 14x^2$ є нескінченно малими величинами. Маємо

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{14x^2} = \frac{3}{14} \neq 0 \Rightarrow \alpha(x) = 3x^2 \text{ та } \beta(x) = 14x^2 \text{ при } x \rightarrow 0 \text{ є нескінченно}$$

малими величинами одного порядку при .

Приклад. Порівняти порядок функцій $\alpha(x) = 3x^4$ та $\beta(x) = 14x$ при $x \rightarrow 0$.

Розв'язування. Легко бачити, що при $x \rightarrow 0$ функції $\alpha(x) = 3x^4$ та $\beta(x) = 14x$ є нескінченно малими величинами. Маємо

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^4}{14x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3}{14} = 0 \Rightarrow \text{при } x \rightarrow 0 \quad \alpha(x) = 3x^4 \text{ є нескінченно малою}$$

величиною більш високого порядку, ніж нескінченно мала величина $\beta(x) = 14x$.

Основні теореми про нескінченно малі функції

Теорема. Границя відношення двох нескінченно малих функцій не зміниться, якщо кожену або одну з них замінити еквівалентною нескінченно малою.

Доведення. Нехай $\alpha = \alpha(x), \beta = \beta(x)$ є нескінченно малі функції при $x \rightarrow x_0$. При цьому $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$ тоді

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\alpha'}{\alpha'} \cdot \frac{\beta'}{\beta'} \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\alpha'} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta'}{\beta} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha'}{\beta'} = 1 \cdot 1 \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha'}{\beta'} \text{ тобто } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha'}{\beta'}.$$

Очевидно також, що

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\alpha'}{\alpha'} \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\alpha'} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha'}{\beta} = 1 \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha'}{\beta} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha'}{\beta}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta'}{\beta'} \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta'}{\beta} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\beta'} = 1 \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\beta'}.$$

Теорема. Різниця двох еквівалентних нескінченно малих функцій є нескінченно малою функцією більш високого порядку, ніж кожна із них.

Доведення. Нехай $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \rightarrow x_0$.

$$\text{Тоді } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(1 - \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} \right) = 1 - \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1 - 1 = 0.$$

Аналогічно доводиться, що $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\beta(x)} = 0$.

Теорема. Якщо різниця нескінченно малих функцій $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ є нескінченно малою функцією більш високого порядку, ніж $\alpha(x)$ або $\beta(x)$, то $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ - еквівалентні нескінченно малі функції.

Доведення. Нехай

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\alpha(x)} = 0$. Тоді $\lim_{x \rightarrow x_0} (1 - \frac{\beta(x)}{\alpha(x)}) = 0$, тобто $1 - \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1$. Маємо

$$\alpha(x) \sim \beta(x).$$

Аналогічно доводиться, що якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\beta(x)} = 0$, то $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Використання еквівалентних нескінченно малих величин.

Знаходження границь.

Для розкриття невизначеності виду $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$ часто буває корисним використовувати принцип заміни нескінченно малих функцій еквівалентними, а також інші властивості нескінченно малих функцій. Приведемо таблицю основних еквівалентних функцій.

1	$\sin x \sim x$ при $x \rightarrow 0$	6	$e^x - 1 \sim x$ при $x \rightarrow 0$
2	$\operatorname{tg} x \sim x$ при $x \rightarrow 0$	7	$a^x - 1 \sim x \cdot \ln a$ при $x \rightarrow 0$
3	$\arcsin x \sim x$ при $x \rightarrow 0$	8	$\ln(1+x) \sim x$ при $x \rightarrow 0$
4	$\arctg x \sim x$ при $x \rightarrow 0$	9	$\log_a(1+x) \sim x \cdot \log_a e$ при $x \rightarrow 0$
5	$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ при $x \rightarrow 0$	10	$(1+x)^k - 1 \sim kx$ при $x \rightarrow 0$
			$\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{x}{2}$ при $x \rightarrow 0$

Приклад. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 3x}$.

Розв'язання. Оскільки $\operatorname{tg} 2x \sim 2x$; $\sin 3x \sim 3x$ тоді $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$.

Питання та завдання до контролю знань студентів

1. Дайте означення нескінченно малої функції.
2. Як порівняти нескінченно малі функції?
3. Що таке непорівнюючі нескінченно малі?
4. Назвіть основні теореми про нескінченно малі функції.

Домашнє завдання: [1], с. 177...178, 182-184

Лекція

з навчальної дисципліни Математичний аналіз

Тема Перша і друга важливі границі. Наслідки.

Мета заняття ознайомити студентів з поняттям границі функції, сформулювати вміння використовувати першу і другу важливі границі для розв'язування прикладів

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

План проведення лекції

Структура лекції	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв	Включає в себе: <i>привітання, визначення присутності студентів на занятті</i>
2 Актуалізація опорних знань, перевірка вивченого матеріалу та мотивація навчальної діяльності студентів	10 хв	Включає в себе: <i>вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, перевірку попереднього матеріалу, формулювання мети лекції, огляд головних питань теми</i>
3 Основна частина (викладення навчальних питань лекції)	55 хв	Головне місце приділяється викладенню основного змісту матеріалу теми, його аналізу, узагальненню висунутих положень.
4 Заключна частина Домашнє завдання: [3], с. 178...182 [6], с. 208 [2], с. 46	10 хв	Включає в себе: <i>узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого на лекції матеріалу</i>

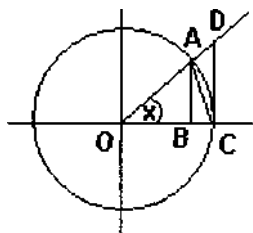
Література

- Фартушний, І.Д. Математика для економістів. Конспект лекцій:[Текст] / КПП ім. Ігоря Сікорського; уклад.: І.Д.Фартушний.- К.:КПП ім.Ігоря Сікорського,2019.-109с
- Денисюк, В. П. Вища математика:[Текст] навч. посібник у 4-х ч./ В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч. 1. – 295 с.
- Макаренко В. О. Вища математика для економістів [Текст] : навч. посіб / В. О. Макаренко. – К.: Знання, 2008. – 517 с.

Навчальні матеріали лекції

Теорема (Перша чудова границя) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Доведення. Нехай $x > 0$. Розглянемо x поблизу нуля, тому припустимо, що $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Зробимо рисунок. Візьмемо коло з центром у довільній точці O і радіусом R .



Відкладемо кут $\angle AOC$, радіанна міра якого x . Маємо:

$$S_{\triangle OAC} < S_{\text{сектора } OAC} < S_{\triangle ODC},$$

$$\text{де } S_{\Delta OAC} = \frac{1}{2} R^2 \sin x; \quad S_{\text{секм}} OAC = \frac{1}{2} R^2 x; \quad S_{\Delta ODC} = \frac{1}{2} \cdot OC \cdot DC = \frac{1}{2} R^2 \operatorname{tg}(x),$$

$$\text{тоді } \frac{1}{2} R^2 \sin x < \frac{1}{2} R^2 \cdot x < \frac{1}{2} R^2 \operatorname{tg}(x), \quad \sin(x) < x < \operatorname{tg}(x).$$

Поділимо подвійну нерівність на $\sin x$ ($\sin x > 0$),

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}, \text{ або } \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1. \text{ Оскільки } \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1; \text{ тоді } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1; (x > 0).$$

Розглянемо випадок, коли $x < 0$.

Введемо нову змінну $t = -x$,

$$\text{де } t > 0. \text{ Тоді } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

Повертаючись до змінної x , одержимо

$$1 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(-x)}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}, \text{ де } x < 0.$$

Таким чином незалежно від знака x виконується умова

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Дана границя називається першою чудовою (інколи її називають важливою) границею.

Зауваження. Нехай маємо функцію $y(x)$, для якої $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$, тоді $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin g(x)}{g(x)} = 1$.

Приклад. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$

$$\text{Розв'язування. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 3x}{3x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 3 \cdot 1 = 3$$

Приклад. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{x}$

$$\begin{aligned} \text{Розв'язування. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{x} &= \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x \cdot \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x \cdot 5}{5x \cdot \cos x} = \\ &= 5 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 5 \cdot 1 \cdot 1 = 5 \end{aligned}$$

Приклад. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

$$\begin{aligned} \text{Розв'язування. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \left\{ 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{x}{2}}{2 \cdot \frac{x}{2} \cdot 2 \cdot \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Друга чудова границя.

Теорема $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$

Доведення. Спочатку розглянемо випадок, коли $x > 0$. Оскільки $x \rightarrow 0$, то вважатимемо, що $0 < x < 1$. Згідно аксіоми Архімеда маємо

$$n \leq \frac{1}{x} < n+1, \text{ або } \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$$

Тоді виконуються такі нерівності

$$1 + \frac{1}{n+1} < 1+x \leq 1 + \frac{1}{n}$$

Внаслідок того, що $n \leq \frac{1}{x} < n+1$, можна записати такі нерівності:

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{x}} < (1+x)^{\frac{1}{x}} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{x}} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$$\text{Тоді } \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < (1+x)^{\frac{1}{x}} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Якщо $x \rightarrow 0$, то $n \rightarrow \infty$ маємо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{n+1}} = \frac{e}{1} = e$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = e$$

тоді границя $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$ існує і $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

Розглянемо випадок, коли $x < 0$. Зробимо заміну

$$1+x = \frac{1}{1+t}.$$

$$\text{Тоді } x = \frac{1}{1+t} - 1 = \frac{-t}{1+t}.$$

Видно, якщо $x < 0$, то $t > 0$.

Маємо:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1+t}\right)^{\frac{1}{-t}} = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1+t}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}+1} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} \cdot (1+t) = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} (1+t) = e \cdot 1 = e \end{aligned}$$

Тоді незалежно від знака x маємо $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

Наслідок. Якщо зробити заміну $x = \frac{1}{y}$, тоді при $x \rightarrow 0+$ $y \rightarrow \infty$, маємо:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e$$

Наслідок. Нехай маємо функцію $g(x)$, для якої $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$

$$\text{Тоді } \lim_{x \rightarrow 0} (1+g(x))^{\frac{1}{g(x)}} = e$$

Приклад. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$

Розв'язування. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} = \left\{1^{\infty}\right\} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{\sin x} \cdot \sin x \cdot \frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}} = e^1 = e$

Маємо $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} = e$

Питання та завдання до контролю знань студентів

1. Дайте означення границі функції.
2. Як виглядає перша важлива границя?
3. Як виглядає друга важлива границя?

Домашнє завдання: [1], с. 175...177

Лекція

з навчальної дисципліни Математичний аналіз

Тема Означення похідної функції. Геометричний, фізичний та механічний зміст похідної. Правила диференціювання

Мета заняття Повторити, узагальнити й систематизувати знання про похідну функції, правилами та формулами диференціювання, сформулювати вміння використовувати набуті раніше знання для розв'язування завдань.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

опорний конспект, мультимедійна презентація

Час – 2 години

План проведення лекції

Структура лекції	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв	Включає в себе: привітання, визначення присутності студентів на занятті
2 Актуалізація опорних знань, перевірка вивченого матеріалу та мотивація навчальної діяльності студентів	10 хв	Включає в себе: вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, перевірку попереднього матеріалу, формулювання мети лекції, огляд головних питань теми
3 Основна частина (викладення навчальних питань лекції)	55 хв	Головне місце приділяється викладенню основного змісту матеріалу теми, його аналізу, узагальненню висунутих положень.
4 Заключна частина Домашнє завдання: [3], с. 217...221 [1], с. 191	10 хв	Включає в себе: узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого на лекції матеріалу

Література

1. Дубовик, В.П. Вища математика:[Текст] / В.П.Дубовик, І.І.Юрик.– К.: Ігнатекс-Україна, 2013. – 648 с.

3. Денисюк, В. П. Вища математика:[Текст] навч. посібник у 4-х ч./ В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч. 1. – 295 с.

Навчальні матеріали лекції

Означення похідної

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на проміжку $(a; b)$. Візьмемо будь-яке значення x із цього проміжку і надамо йому приросту Δx .

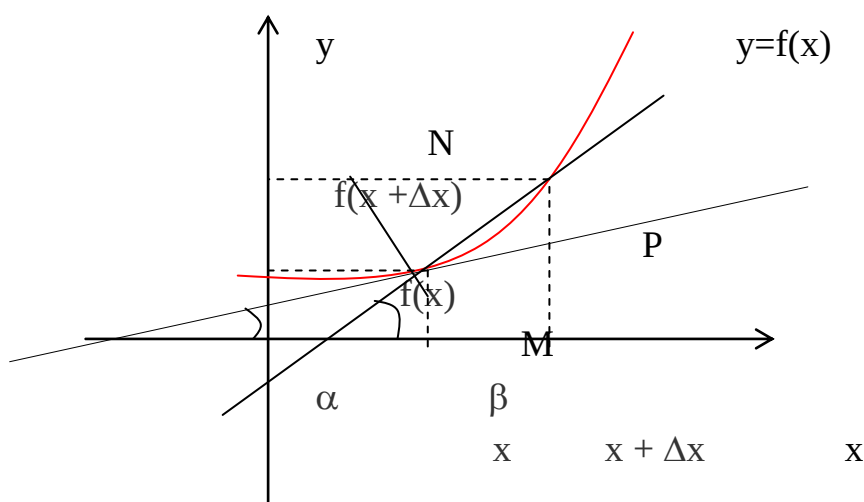
Різниця $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ називається приростом функції в точці x

Приріст аргументу $\Delta x \neq 0$ може набувати як додатних, так і від'ємних значень, але так, що значення $x + \Delta x$ не виходить за межі області визначення функції $f(x)$.

Похідною функції $y = f(x)$ у точці x називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли останній прямує до нуля, тобто

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Позначення похідної: $f'(x)$, $y'(x)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df}{dx}$.



Процес знаходження похідної називається диференціюванням. Функція, яка має скінченну похідну в точці x , називається диференційованою в цій точці.

Геометричний зміст похідної: похідна $f'(x)$ у точці x_0 дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці, абсциса якої дорівнює x_0 ,

тобто $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \beta = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$ де α - кут між дотичною та віссю Ox .

Рівняння дотичної, проведеної до графіка функції $y = f(x)$ у точці M , має вигляд

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0), \text{ де } y_0 = f(x_0)$$

Нормаллю до кривої називають пряму, що проходить через точку дотику, перпендикулярно до дотичної – це пряма MN, тоді рівняння буде

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

Фізичний зміст похідної: Якщо функція $y = f(x)$ описує деякий фізичний процес, то похідна y' є швидкістю зміни цього процесу. Тобто, яку б фізичну залежність не відображала функція $y = f(x)$, відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ можна розглядати як середню швидкість зміни функції y відносно аргументу x , а похідну $f'(x)$ - як миттєву швидкість зміни цієї функції.

Механічний зміст похідної: Якщо $S = S(t)$ - закон прямо лінійного руху матеріальної точки, то похідна $S'(t)$ - це швидкість v точки в момент часу t , а друга похідна $S''(t)$ - миттєве прискорення a точки в момент t . Тобто

$$v = S'(t), a = S''(t) = v'(t)$$

Основні правила диференціювання.

Нехай $u = u(x)$, $v = v(x)$ - диференційовані в точці x функції, C -стала. Тоді правильні формули :

$$1) (u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$2) (u \cdot v)' = u \cdot v' + u' \cdot v$$

$$3) \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}, \text{ якщо } v \neq 0$$

$$4) (Cu)' = Cu'$$

Таблиця похідних (формули диференціювання основних елементарних функцій)

$$1) C' = 0;$$

$$2) (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1};$$

$$3) (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$4) \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$5) (e^x)' = e^x$$

$$6) (a^x)' = a^x \ln a$$

$$9) (\sin x)' = \cos x$$

$$10) (\cos x)' = -\sin x$$

$$11) (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$12) (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$13) (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$14) (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$7) (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$15) (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$8) (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$16) (\operatorname{arcc} \operatorname{tg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Похідна складеної функції

Якщо функція $u = g(x)$ має похідну в точці x , а функція $y = f(u)$ - у відповідній точці $u = g(x)$, то складена функція $y = f(g(x))$ диференційована в точці x , причому

$$y' = f'(u) \cdot g'(x).$$

Тобто, похідна складеної функції $y = f(u)$, $u = g(x)$ дорівнює добутку похідної від зовнішньої функції, взятої по внутрішньому аргументу u , і похідної від внутрішньої функції, взятої по незалежній змінній x

Похідна оберненої функції

Нехай $y = f(x)$ і $x = g(y)$ - пара взаємно обернених функцій.

Теорема: Якщо функція $y = f(x)$ строго монотонна на інтервалі $(a; b)$ і має відмінну від нуля похідну $f'(x)$ у довільній точці цього інтервалу, тоді існує обернена функція $x = g(y)$, яка також має похідну $g'(y)$ причому

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

Питання та завдання до контролю знань студентів

1. Дайте означення похідної функції.
2. Назвіть геометричний зміст похідної функції.
3. Назвіть правила диференціювання.
4. Дайте означення диференційованої функції.
5. Назвіть формули диференціювання.

Домашнє завдання: [1], с. 217-221

Лекція

з навчальної дисципліни Математичний аналіз

Тема **Диференціювання неявної функції.**

Диференціювання функцій, заданих параметрично.

Мета заняття ознайомити студентів з поняттям неявної функції, сформулювати вміння обчислювати похідну неявної функції.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН
опорний конспект

План проведення лекції

Структура лекції	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв	Включає в себе: <i>привітання, визначення присутності студентів на занятті</i>
2 Актуалізація опорних знань, перевірка вивченого матеріалу та мотивація навчальної діяльності студентів	10 хв	Включає в себе: <i>вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, перевірку попереднього матеріалу, формулювання мети лекції, огляд головних питань теми</i>
3 Основна частина (викладення навчальних питань лекції)	55 хв	Головне місце приділяється <i>викладенню основного змісту матеріалу теми, його аналізу, узагальненню висунутих положень.</i>
4 Заключна частина Домашнє завдання: [3], с. 223...224 [1], с. 214...215	10 хв	Включає в себе: <i>узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого на лекції матеріалу</i>

Література

- Дубовик, В.П. Вища математика:[Текст] / В.П.Дубовик, І.І.Юрик.– К.: Ігнатекс-Україна, 2013. – 648 с.
- Денисюк, В. П. Вища математика:[Текст] навч. посібник у 4-х ч./ В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч. 1. – 295 с.

Навчальні матеріали лекції

Похідна неявної функції

Нехай значення двох змінних x і y зв'язані між собою деяким рівнянням, яке символічно записується так: $F(x, y) = 0$ (1)

Якщо функція $y = f(x)$, яка визначена на інтервалі $(a; b)$, така ,що рівняння (1) при підстановці у нього замість y вираз $f(x)$ обертає його на тотожність відносно x , то функція $y = f(x)$ є явною функцією, яка визначена рівнянням (1).

Так, наприклад, рівняння

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0 \quad (2)$$

явно визначає наступні елементарні функції

$$y = \pm\sqrt{a^2 - x^2} \quad (3)$$

Дійсно, після підстановки в рівняння (2) отримаємо тотожність

$$x^2 + (a^2 - x^2) - a^2 = 0$$

Вираз (3) отримали шляхом розв'язання рівняння (2) відносно y . Але не будь-яку явно задану функцію можна подати явно, тобто можна подати у вигляді $y = f(x)$, де $f(x)$ є елементарною функцією.

Так, наприклад, функції, які задані рівняннями $y^6 - y - x^2 = 0$ або $y - x - \frac{1}{4}\sin y = 0$, не можна виразити через елементарні функції, тобто ці рівняння неможливо розв'язати відносно y .

Розглянемо правило обчислення похідної неявної функції.

Припустимо, що функція задана рівнянням: $x^2 + y^2 - a^2 = 0$.

Якщо в цьому рівнянні y є функцією від x , яка визначається цим рівнянням, то ця рівність є тотожністю.

Диференціюючи обидві частини цієї тотожності по x , отримаємо (користуючись правилом диференціювання складеної функції):

$$2x + 2yy' = 0$$

звідки

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

Зауважимо, що якщо б ми почали диференціювати відповідну явну функцію

$$y = \sqrt{a^2 - x^2},$$

то отримали б:

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{x}{y},$$

тобто той же результат.

Розглянемо ще один приклад неявної функції: $y^6 - y - x^2 = 0$. Диференціюємо по x :

$$6y^5 y' - y' - 2x = 0,$$

звідки $y' = \frac{2x}{6y^5 - 1}.$

Похідна функції, заданої параметрично

Нехай функція y від x задана параметричними рівняннями:

$$\begin{cases} x = \varphi_1(t) \\ y = \varphi_2(t) \end{cases}$$

Положимо, що ці функції мають похідні і що $x = \varphi_1(t)$ має обернену $t = \phi(x)$, яка також має похідну. Тоді визначену параметричними рівняннями функцію $y = f(x)$ можна розглядати як складену функцію:

$$y = \varphi_2(t), \quad t = \phi(x).$$

За правилом диференціювання складеної функції отримаємо:

$$y'_x = y'_t t'_x = \varphi'_2(t) \phi'_x(x) \quad (1)$$

На підставі теореми про диференційованість оберненої функції маємо:

$$\phi'_x(x) = \frac{1}{\varphi'_t(t)}.$$

Підставивши останній вираз у рівність (1), отримаємо:

$$y'_x = \frac{\varphi'_2(t)}{\varphi'_1(t)} \quad \text{або} \quad \boxed{y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}}$$

Приклад:

Функція y від x задана параметричними рівняннями: $x = acost$, $y = asint$.
Обчислити похідну y'_x .

Розв'язування: $y'_x = \frac{(asint)'}{(acost)'} = \frac{acost}{-asint} = -ctgt.$

Питання та завдання до контролю знань студентів

1. Дайте означення функції, заданої параметрично.
2. Як виглядає показниково - степенева функція?
3. Назвіть формули та правила диференціювання.

Домашнє завдання: [1] с. 223

Лекція

з навчальної дисципліни Математичний аналіз

Тема Правила дослідження функції на екстремум.

Мета заняття ознайомити студентів з поняттям критичної точки, ознаками зростання, спадання, точками екстремуму, сформулювати вміння використовувати ці ознаки при розв'язуванні завдань.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН
опорний конспект

Час – 2 години

План проведення лекції

Структура лекції	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв	Включає в себе: привітання, визначення присутності студентів на занятті
2 Актуалізація опорних знань, перевірка вивченого матеріалу та мотивація навчальної діяльності студентів	10 хв	Включає в себе: вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, перевірку попереднього матеріалу, формулювання мети лекції, огляд головних питань теми
3 Основна частина (викладення навчальних питань лекції)	55 хв	Головне місце приділяється викладенню основного змісту матеріалу теми, його аналізу, узагальненню висунутих положень.
4 Заключна частина Домашнє завдання: [3], с. 273...276 [1], с. 248	10 хв	Включає в себе: узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого на лекції матеріалу

Література

1. Дубовик, В.П. Вища математика:[Текст] / В.П.Дубовик, І.І.Юрик.– К.: Ігнатекс-Україна, 2013. – 648 с.

Навчальні матеріали лекції

Дослідження функції

Щоб дослідити функцію та побудувати її графік, треба виконати такі дії:

- 1) Знайти область визначення функції;
- 2) Знайти точки перетину графіка з осями координат;
- 3) Перевірити функцію на парність, не парність, періодичність ;
- 4) За першою похідною знайти інтервали монотонності, точки локальних екстремумів і значення функції в цих точках;
- 5) За другою похідною знайти інтервали опуклості, вгнутості і точки перегину;
- 6) Знайти асимптоти кривої;
- 7) Обчислити значення функції в кількох контрольних точках;
- 8) Всі данні занести до таблиці і побудувати графік.

Правило дослідження функції на екстремум:

1) знайти критичні точки функції $f(x)$. Для цього слід розв'язати рівняння $f'(x) = 0$ і серед його розв'язків вибрати тільки ті корені, які є внутрішніми точками області існування функції, знайти точки в яких похідна існує;

2) якщо критичні точки є, то треба дослідити знак похідної в кожному з інтервалів, на які розбивається область існування цими критичними точками. Для цього достатньо визначити знак похідної в якій-небудь одній точці інтервалу, оскільки похідна може змінити знак лише переходячи через критичну точку; 3) за зміною знака $f'(x)$ при переході через критичні точки зліва направо визначити точки максимумів та мінімумів і обчислити значення функції $f(x)$ в цих точках .

Приклад.

Провести повне дослідження функції і побудувати її графік $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$

Розв'язання

1) Область визначення функції $x^2 - 1 \neq 0$, $x \neq \pm 1$, отже $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$.

2) точки перетину графіка з осями координат:

з віссю Ох, якщо $y = 0$, то $x = 0$,

з віссю Оу, якщо $x = 0$, то $y = 0$, тобто графік функції проходить через початок координат.

3) Перевірити функцію на парність, не парність, періодичність

$y(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 1} = -\frac{x^3}{x^2 - 1} = -y(x)$ - функція непарна, тобто її графік симетричний відносно початку координат..

4) інтервали монотонності і точки екстремуму

$$y' = \frac{3x^2(x^2 - 1) - 2x \cdot x^3}{(x^2 - 1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2}$$

$y' = 0$, звідси критичні точки $x = 0$; $x = -\sqrt{3}$; $x = \sqrt{3}$; $x = -1$; $x = 1$.

Знайдемо проміжки зростання і спадання

$$\begin{array}{ccccccc} + & & - & & - & & - & & - & & + \\ \hline & -\sqrt{3} & & -1 & & 0 & & 1 & & \sqrt{3} \end{array}$$

Звідси бачимо, що $x = -\sqrt{3}$ являється точкою максимуму,

а точка $x = \sqrt{3}$ являється точкою мінімуму і значення функції $y(-\sqrt{3}) = \frac{-3\sqrt{3}}{2}$ і

$$y(\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

5) інтервали опуклості і точки перегину

Обчислимо другу похідну функції

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{(4x^3 - 6x)(x^2 - 1)^2 - (x^4 - 3x^2)4x(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^4} = \\ &= \frac{(4x^3 - 6x)(x^4 - 2x^2 + 1) - (x^4 - 3x^2)(4x^3 - 4x)}{(x^2 - 1)^4} = \\ &= \frac{4x^7 - 8x^5 + 4x^3 - 6x^5 + 12x^3 - 6x - 4x^7 + 4x^5 + 12x^5 - 12x^3}{(x^2 - 1)^4} = \\ &= \frac{2x^5 + 4x^3 - 6x}{(x^2 - 1)^4} = \frac{2x(x^4 + 2x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^4} = \frac{2x(x^2 + 3)(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^4} = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3} \\ y'' &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \cap & & \cap & & \cup & & \cap & & \cup & & \cup \\ \hline & -\sqrt{3} & & -1 & & 0 & & 1 & & \sqrt{3} \end{array}$$

Звідси бачимо, що $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ - являються точками перегину.

б) Асимптоти кривої

Вертикальні: так як $\lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{x^3}{x^2 - 1} = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{x^3}{x^2 - 1} = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^3}{x^2 - 1} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^3}{x^2 - 1} = +\infty, \text{ то}$$

прямі $x = 1$, $x = -1$ - вертикальні асимптоти.

Горизонтальні: відсутні.

$$\text{Вертикальні: } k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x^2}} = 1;$$

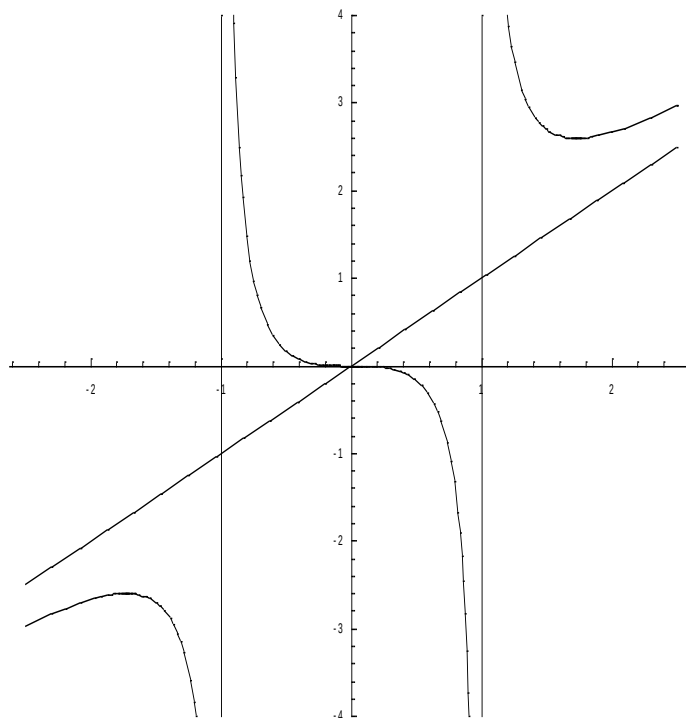
$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 - x^3 + x}{x^2 - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}} = 0 \quad \text{Звідси Рівняння похилої}$$

асимптоти $y = x$

7)Всі данні занесемо до таблиці і побудуємо графік.

x	$-\infty; -\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}; -1$	-1	-1; 0	0	0; 1	1	$1; \sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}; \infty$
y'	+	ма х	-	-	-	0	-		-	мі н	+
y''	-		-	п	+	п	-	п	+		+

y	$\cap$	-2.6	$\cap$		$\cup$	0	$\cap$		$\cup$	2.6	$\cup$
-----	--------	------	--------	--	--------	---	--------	--	--------	-----	--------



ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ: [Б1] с.145, [Б3] с. 248

Лекція

з навчальної дисципліни Математичний аналіз

Тема Означення функції багатьох змінних. Частинні похідні.

Мета заняття ознайомити студентів з поняттям функції кількох змінних, сформувати вміння обчислювати границю функції кількох змінних.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

опорний конспект

Час – 2 години

План проведення лекції

Структура лекції	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв	Включає в себе: привітання, визначення присутності студентів на занятті
2 Актуалізація опорних знань, перевірка вивченого матеріалу та мотивація навчальної діяльності студентів	10 хв	Включає в себе: вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, перевірку попереднього матеріалу, формулювання мети лекції, огляд головних питань теми
3 Основна частина (викладення навчальних питань лекції)	55 хв	Головне місце приділяється викладенню основного змісту матеріалу теми, його аналізу, узагальненню висунутих положень.
4 Заключна частина	10 хв	Включає в себе: узагальнення, теоретичні і

Література

4. Денисюк, В. П. Вища математика:[Текст] навч. посібник у 4-х ч./ В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч. 2. – 275 с.

Навчальні матеріали лекції

Функція багатьох змінних.

Нехай задано множину D упорядкованих пар чисел (x, y) . Якщо кожній парі чисел $(x, y) \in D$ за певним правилом ставиться у відповідність єдине дійсне число z , то кажуть, що на множині D визначено функцію z від двох змінних x та y і записують $z = f(x, y)$.

При цьому змінну z називають залежною змінною (функцією), а x та y — незалежними змінними (*аргументами*).

Множину пар (x, y) для яких функція $z = f(x, y)$ визначена, називають областю визначення (існування) цієї функції і позначають $D(f)$ або D .

Множину значень z позначають $E(f)$ або E .

Кожній упорядкованій парі чисел (x, y) у прямокутній декартовій системі координат взаємно однозначно відповідає точка $M(x, y)$ площини Oxy . Тому функцію $z = f(x, y)$ можна розглядати як функцію точки $M(x, y)$ і писати $z = f(M)$

Значення функції $z = f(x, y)$ в точці $M_0(x_0; y_0)$ позначають так: $z_0 = f(x_0, y_0)$, або $z_0 = f(M_0)$, або $z = z|_{M_0}$.

Областю визначення функції двох змінних $z = f(x, y)$ деяка множина точок координатної площини R^2 (площини Oxy).

Будь-який упорядкований набір m дійсних чисел $x_1, x_2, \dots, x_m$ позначають $(x_1, x_2, \dots, x_m)$, або $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$, і називають точкою m -вимірною координатного простору R^m . Числа $x_1, x_2, \dots, x_m$ називають координатами точки M .

Простір R^1 — це множина всіх дійсних чисел, тобто координатна пряма;

R^2 — множина усіх дійсних пар (x, y) , тобто координатна площина;

R^3 — множина всіх дійсних трійок (x, y, z) , тобто координатний простір.

Відстань між точками $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$ і $M_0(x_1^0; x_2^0; \dots, x_m^0)$ визначають за формулою $p(M, M_0) = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_m - x_m^0)^2}$

Множину всіх точок M , координати яких задовольняють нерівність $p(M, M_0) < \varepsilon$, називають ε — околom точки M_0 . Так, ε — окіл точки $M_0(x_0, y_0)$ — множина всіх точок площини, які розміщені всередині кола радіуса ε з центром у точці M_0

Лінію, що обмежує область D , називають межею області визначення. Точки області, які не лежать на її межі, називають внутрішніми. Область, яка містить лише внутрішні точки, називають відкритою. Якщо ж до області визначення належать і всі точки межі, то таку область називають замкненою.

Якщо всі точки області D містяться всередині деякої m -вимірної кулі, то цю область називають обмеженою.

Область D називають зв'язною, якщо дві довільні її точки можна з'єднати неперервною кривою, усі точки якої містяться в області D .

Наприклад, круг — це зв'язна область, а об'єднання двох кругів, які не мають спільних точок, — незв'язна область.

Надалі під околом точки M будемо розуміти довільну відкриту зв'язну множину, яка містить точку M .

Узагальнимо поняття функції на випадок трьох і більше незалежних змінних.

Якщо кожній трійці чисел $(x, y, z) \in D$ за певним правилом відповідає єдине число u , то кажуть, що на множині D визначено функцію u від трьох змінних x, y та z , і записують $u = f(x, y, z)$ або $u = f(M)$

Тут u — залежна змінна (функція), а x, y, z — незалежні змінні (аргументи). Область існування функції $u = f(x, y, z)$ — деяка множина точок простору R^3 . Саму функцію геометрично зобразити неможливо.

Наприклад, областю існування функції $u = \ln(4 - x^2 - y^2 - z^2)$ є куля радіуса 2 з центром у початку координат. Цій області не належать точки сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ — межі області. Отже, шукана область відкрита. Множиною значень даної функції є проміжок $(-\infty; \ln 4]$.

Якщо кожній точці $M(x_1; x_2; \dots x_m)$ із області D ставиться за певним правилом у відповідність деяке число u , то кажуть, що на множині D визначено функцію m змінних, і пишуть $u = (x_1; x_2; \dots x_m)$ або $u = f(M)$.

Частинні похідні.

Нехай функція $f(x, y)$ визначена в деякому околі точки $(x_0; y_0)$. При фіксованому $y = y_0$ дістанемо функцію $f(x; y_0)$, яка залежить тільки від однієї змінної x , а при $x = x_0$ дістанемо функцію $f(x_0; y)$, яка залежить тільки від y . Похідна функції $f(x; y_0)$ при $x = x_0$ називається частинною похідною по x функції $f(x, y)$ у точці $(x_0; y_0)$ і позначається $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0)$ або $f'_x(x_0; y_0)$, а похідна функції $f(x_0; y)$ при $y = y_0$ називається частинною похідною по y функції $f(x, y)$ у точці $(x_0; y_0)$ і позначається $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0)$ або $f'_y(x_0; y_0)$.

Коротко означення частинних похідних можна сформулювати так: $f'_x(x; y)$ - це похідна по x функції $f(x; y)$ при фіксованому y , а $f'_y(x; y)$ - це похідна по y функції $f(x; y)$ при фіксованому x .

Отже, частинні похідні функції знаходять за звичайними правилами диференціювання; треба тільки при диференціюванні по x змінну y вважати сталою, а при диференціюванні по y вважати сталою x .

Наприклад, якщо $f(x; y) = x^2 y^3$, то

$$f'_x(x; y) = (x^2 y^3)'_x = y^3 (x^2)'_x = y^3 \cdot 2x = 2xy^3,$$

$$f'_y(x; y) = (x^2 y^3)'_y = x^3 (y^3)'_y = x^3 \cdot 3y^2 = 3x^2 y^2.$$

Аналогічно, якщо $z = x^2 y + x \sin xy$, то

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 y + x \sin xy) = y \cdot 2x + \frac{\partial}{\partial x}(x \sin xy) = 2xy + \sin xy + xy \cos xy,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 y + x \sin xy) = x^2 + x^2 \cos xy$$

Лекція

з навчальної дисципліни Математичний аналіз

Тема Похідна за напрямом. Градієнт функції багатьох змінних.

Мета заняття сформувати у студентів поняття функції багатьох змінних, похідної за напрямом, вміння обчислювати градієнт функції багатьох змінних.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН
опорний конспект

Час – 2 години

План проведення лекції

Структура лекції	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв	Включає в себе: привітання, визначення присутності студентів на занятті
2 Актуалізація опорних знань, перевірка вивченого матеріалу та мотивація навчальної діяльності студентів	10 хв	Включає в себе: вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, перевірку попереднього матеріалу, формулювання мети лекції, огляд головних питань теми
3 Основна частина (викладення навчальних питань лекції)	55 хв	Головне місце приділяється викладенню основного змісту матеріалу теми, його аналізу, узагальненню висунутих положень.

4 Заключна частина Домашнє завдання: [4], с. 19...20	10 хв	Включає в себе: узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого на лекції матеріалу
--	-------	---

Література

4. Денисюк, В. П. Вища математика:[Текст] навч. посібник у 4-х ч./ В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч. 2. – 275 с.

Навчальні матеріали лекції

Дотична площина та нормаль до поверхні

Дотичною площиною до поверхні у точці дотику $M_0(x_0, y_0, z_0)$ називають площину, що містить у собі всі дотичні прямі в точці $M(x, y, z)$ до кривих що лежать на поверхні і проходять через точку M_0 .

Нормаллю до поверхні у точці M_0 називають пряму, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до дотичної площини в цій точці. Рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні подано у таблицях 1.1 та 1.2.

Таблиця 1.1

Рівняння поверхні	Рівняння дотичної площини до поверхні
$F(x, y, z) = 0$	$\frac{\partial F(M_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F(M_0)}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial F(M_0)}{\partial z}(z - z_0) = 0$
$z = f(x, y)$	$z - z_0 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0)$

Таблиця 1.2

Рівняння поверхні	Рівняння нормалі до поверхні
$F(x, y, z) = 0$	$\frac{x - x_0}{\frac{\partial F(M_0)}{\partial x}} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial F(M_0)}{\partial y}} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial F(M_0)}{\partial z}}$
$z = f(x, y)$	$\frac{x - x_0}{\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}} = \frac{z - z_0}{-1}$

Похідна за напрямом. Градієнт функції кількох змінних

Нехай функція $u = f(x, y, z)$ визначена і неперервна в околі точки

$M(x, y, z)$. Задамо у точці M одиничний вектор $l = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$, який утворює з осями координат Ox, Oy, Oz відповідно кути α, β, γ . Візьмемо на прямій, яка проходить через точку M напрямі вектора l , точку

$M_1(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ (рис. 1.9).

Позначимо довжину MM_1 через Δl .

$$\text{Тоді } \Delta l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$$

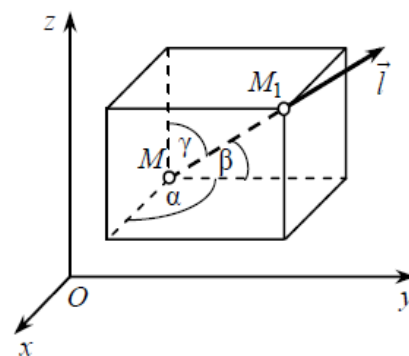


Рис. 1.9

Похідною функції $u(x, y, z)$ за напрямом вектора $\vec{l}$ називають границю відношення $\frac{\Delta u}{\Delta l}$ при $\Delta l \rightarrow 0$, якщо вона існує, і позначають $\frac{\partial u}{\partial l}$, тобто

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{u(M_1) - u(M)}{\Delta l}$$

Похідну функції $u(x, y, z)$ у напрямі вектора $\vec{l} = \{l_x, l_y, \dots, l_z\}$ обчислюють за формулою

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma,$$

де $\cos \alpha = \frac{l_x}{|\vec{l}|}$, $\cos \beta = \frac{l_y}{|\vec{l}|}$, $\cos \gamma = \frac{l_z}{|\vec{l}|}$, — напрямні косинуси вектора $\vec{l}$,

$$|\vec{l}| = \sqrt{l_x^2 + l_y^2 + l_z^2} - \text{довжина вектора } \vec{l}.$$

Похідна за напрямом узагальнює поняття частинної похідної.

Так, якщо $l = \{1; 0; 0\}$, то $\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}$, якщо $\vec{l} = \{0; 1; 0\}$, то $\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial y}$, якщо $\vec{l} = \{0; 0; 1\}$, то $\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial z}$.

Градiєнтом функції $u = f(x, y, z)$ у точці $M(x, y, z)$ називають вектор, координатами якого є частинні похідні функції $u(x, y, z)$, обчислені в точці M , тобто

$$\text{grad } u(M) = \frac{\partial u(M)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u(M)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u(M)}{\partial z} \vec{k},$$

або

$$\text{grad } u(M) = \left\{ \frac{\partial u(M)}{\partial x}, \frac{\partial u(M)}{\partial y}, \frac{\partial u(M)}{\partial z} \right\}.$$

Між градієнтом і похідною за напрямом існує такий зв'язок:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \text{grad } u * \vec{l} = |\text{grad } u| * |\vec{l}| * \cos \varphi,$$

де φ — кут між градієнтом функції $u(x, y, z)$ і напрямним вектором $\vec{l}$.

З цієї формули випливає, що похідна $\frac{\partial u}{\partial l}$ набуває найбільшого значення тоді, коли $\cos \varphi = 1$, тобто тоді, коли напрям вектора $\vec{l}$ збігається з напрямом градієнта, при цьому найбільше значення похідної — дорівнює модулю градієнта функції $u = f(x, y, z)$ обчисленого в точці M , тобто

$$\frac{\partial u}{\partial x} = |\text{grad } u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

Лекція

з навчальної дисципліни Математичний аналіз

Тема Частинні похідні і диференціали вищих порядків.

Мета заняття розвинути у студентів практичні навички обчислення частинних похідних і диференціалів вищих порядків.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН
опорний конспект

Час – 2 години

План проведення лекції

Структура лекції	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв	Включає в себе: <i>привітання, визначення присутності студентів на занятті</i>
2 Актуалізація опорних знань, перевірка вивченого матеріалу та мотивація навчальної діяльності студентів	10 хв	Включає в себе: <i>вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, перевірку попереднього матеріалу, формулювання мети лекції, огляд головних питань теми</i>
3 Основна частина (викладення навчальних питань лекції)	55 хв	Головне місце приділяється викладенню <i>основного змісту матеріалу теми, його аналізу, узагальненню висунутих положень.</i>
4 Заключна частина Домашнє завдання: [4], с. 20...26	10 хв	Включає в себе: <i>узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого на лекції матеріалу</i>

Література

4. Денисюк, В. П. Вища математика:[Текст] навч. посібник у 4-х ч./ В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч. 2. – 275 с.

Навчальні матеріали лекції

Нехай функція $z = f(x, y)$ задана в області D і має частинні похідні $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ в усіх точках $(x, y) \in D$. Тоді ці похідні можна розглядати як нові функції, задані в області D .

Якщо існує частинна похідна за x від функції $\frac{dz}{dx}$ - то її називають частинною похідною другого порядку від функції $z = f(x, y)$ за змінною x і позначають одним

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, z''_{xx}, \text{ або } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, f''_{xx}.$$

із символів:

Отже, за означенням

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right), \text{ або } z''_{xx} = (z'_x)'_x.$$

Аналогічно визначають похідну другого порядку від функції $z = f(x, y)$ за змінною y :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right), \text{ або } z''_{yy} = (z'_y)'_y.$$

Якщо існує частинна похідна від функції $\frac{\partial z}{\partial x}$ за змінною y , то цю похідну називають *мішаною* частинною похідною другого порядку від функції $z = f(x, y)$ і позначають $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, z'_{xy} .

Отже за значенням

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right), \text{ або } z''_{xy} = (z'_x)'_y.$$

Для функції двох змінних $z = f(x, y)$ може існувати чотири похідні другого порядку, серед яких дві похідні мішані.

Теорема: (про мішані похідні) Якщо в колі точки (x, y) функція $z = f(x, y)$ має неперервні частинні похідні $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ та $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, то вони рівні між собою.

Для функції $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ може існувати m^2 частинних похідних другого порядку: $\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)$, $i, k = 1, 2, \dots, m$.

Аналогічно вводяться поняття частинних похідних третього порядку і вищих порядків.

Другим диференціалом d^2z функції $z = f(x, y)$ у точці $M(x, y)$ називають диференціал від першого диференціала dz , тобто

$$d^2z = d(dz)$$

Якщо x, y — незалежні змінні, тоді

$$d^2z = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2.$$

Диференціалом n -го порядку $d^n z$ функції $z = f(x, y)$ у точці $M(x, y)$ називають диференціал від диференціала $(n-1)$ -го порядку, тобто $d^n z = d(d^{n-1} z)$.

У випадку, коли x, y — незалежні змінні, формулу можна записати так:

$$d^n z = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{\partial^n f}{\partial x^k \partial y^{n-k}} dx^k dy^{n-k},$$

де
$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Символічний запис цієї формули такий:

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n f$$

Зауважимо, що для диференціалів другого і вищих порядків не виконується властивість інваріантності диференціала, тобто їхня форма змінюється залежно від того, є x і y незалежними змінними чи диференційованими функціями змінних u та v .

Лекція

з навчальної дисципліни Математичний аналіз

Тема **Невизначений інтеграл, його властивості і обчислення.**

Мета заняття повторити, узагальнити й систематизувати знання студентів про первісну та інтеграл, сформувати вміння знаходити первісну функції та обчислювати визначений та невизначений інтеграли.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН
опорний конспект

Час – 2 години

План проведення лекції

Структура лекції	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв	Включає в себе: <i>привітання, визначення присутності студентів на занятті</i>
2 Актуалізація опорних знань, перевірка вивченого матеріалу та мотивація навчальної діяльності студентів	10 хв	Включає в себе: <i>вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, перевірку попереднього матеріалу, формулювання мети лекції, огляд головних питань теми</i>
3 Основна частина (викладення навчальних питань лекції)	55 хв	Головне місце приділяється викладенню основного змісту матеріалу теми, його аналізу, узагальненню висунутих положень.
4 Заключна частина Домашнє завдання: [1], с. 321 [4], с. 77...79 [2], с. 79	10 хв	Включає в себе: <i>узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого на лекції матеріалу</i>

Література

1. Дубовик, В.П. Вища математика:[Текст] / В.П.Дубовик, І.І.Юрик.– К.: Ігнатекс-Україна, 2013. – 648 с.
2. Фартушний, І.Д. Математика для економістів. Конспект лекцій:[Текст] / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: І.Д.Фартушний.- К.:КПІ ім.Ігоря Сікорського,2019.-109с
4. Денисюк, В. П. Вища математика:[Текст] навч. посібник у 4-х ч./ В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч. 2. – 275 с.

Навчальні матеріали лекції

Поняття невизначеного інтегралу

Функцію $F(x)$ називають *первісною* функції $f(x)$ на проміжку (a,b) , якщо $F(x)$ диференційована на (a,b) і виконується рівність

$$F(x)' = f(x), x \in (a, b).$$

Сукупність усіх первісних $F(x) + C$, $C \in R$ функції $f(x)$ на (a,b) називається *невизначеним інтегралом* функції $f(x)$ і позначається так:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Термін «інтеграл» походить від латинського слова *integralis* – цілісний.

Властивості невизначеного інтегралу:

$$1. (\int f(x)dx)' = f(x)$$

$$2. d(\int f(x)dx) = f(x)dx$$

$$3. \int dF(x) = F(x) + c$$

$$4. \int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx, \lambda = const$$

$$5. \int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

6. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$ і $u = \varphi(x)$ - довільна функція, що має неперервну похідну, то $\int f(u)du = F(u) + C$, зокрема $\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a}F(ax + b) + C$

Операція відшукування невизначеного інтегралу від функції називається інтегруванням цієї функції.

Таблиця основних інтегралів

Інтеграли цієї таблиці називаються табличними. Мета існуючих методів інтегрування полягає в тому, щоб звести шуканий інтеграл до табличного. Внаслідок інваріантності кожен табличний інтеграл «породжує» безліч інтегралів, що легко відшукуються на основі табличного.

Нехай $u(x)$ – довільна функція, що має на деякому проміжку неперервну похідну $u'(x)$. Тоді на цьому проміжку справджуються такі формули, що зведені у таблиці:

Інтеграл		Первісна	Інтеграл		Первісна
1	$\int 0dx$	C	9	$\int \frac{dx}{x}$	$\ln x + C$
2	$\int x^\alpha dx$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$	10	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$	$\ln x + \sqrt{x^2 \pm a^2} + C$
3	$\int a^x dx$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	11	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$	$\frac{1}{2a} \ln \left \frac{x+a}{x-a} \right + C$
4	$\int e^x dx$	$e^x + C$	12	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$	$\frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a} + C$
5	$\int \sin x dx$	$-\cos x + C$	13	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx$	$tgx + C$
6	$\int \cos x dx$	$\sin x + C$	14	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx$	$-ctgx + C$
7	$\int tgx dx$	$-\ln \cos x + C$	15	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\arcsin \frac{x}{a} + C$
8	$\int ctg x dx$	$\ln \sin x + C$			

Основні методи інтегрування:

1. Метод безпосереднього інтегрування.
2. Метод підстановки (заміни змінної)
3. Метод інтегрування частинами.

Метод безпосереднього інтегрування базується на використанні таблиці інтегралів, властивостей лінійності інтеграла та інваріантності формул інтегрування.

Приклади розв'язання типових задач

Знайти інтеграли, використовуючи метод безпосереднього інтегрування.

$$1. \int \left(2x^3 + \frac{1}{x} - 1 \right) dx = 2 \int x^3 dx + \int \frac{1}{x} dx - \int dx = 2 \left(\frac{x^{3+1}}{3+1} + C_1 \right) + \ln|x| + C_2 - x + C_3 = \frac{x^4}{2} + \ln|x| - x + C.$$

При кожному інтегруванні виникають проміжні довільні сталі: C_1, C_2, C_3 але тоді $2C_1 + C_2 + C_3$ – також є довільною сталою. Тому надалі стала C означатиме суму всіх проміжних сталих.

$$2. \int \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{x\sqrt{x}} \right) dx = \int x^{-\frac{2}{3}} dx - \int x^{-\frac{3}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} - \frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + C = 3\sqrt[3]{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} + C$$

$$3. \int \frac{dx}{\sqrt{2+2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln |x + \sqrt{1+x^2}| + C$$

$$4. \int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{9}{4}-x^2}} = \frac{1}{2} \arcsin \frac{2x}{3} + C$$

$$5. \int \frac{dx}{1+\cos 2x} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x + C$$

$$6. \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x) dx}{\cos^2 x \sin^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C$$

$$7. \int \frac{4^x - 4}{2^x + 2} dx = \int \frac{(2^x - 2)(2^x + 2)}{2^x + 2} dx = \int (2^x - 2) dx = \frac{2^x}{\ln 2} - 2x + C$$

$$8. \int \frac{dx}{1+9x^2} = \frac{1}{9} \int \frac{dx}{\frac{1}{9}+x^2} = \frac{1}{9} \int \frac{dx}{(\frac{1}{3})^2+x^2} = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} 3x + C$$

$$9. \int \frac{x^2 dx}{x^2+1} = \int \frac{(x^2+1)-1}{x^2+1} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1} \right) dx = \int dx - \int \frac{dx}{x^2+1} = x - \operatorname{arctg} x + C$$

Питання та завдання до контролю знань студентів

1. Дайте означення невизначеного інтегралу.
2. Назвіть таблицю основних інтегралів.
3. Які методи інтегрування вам відомі?

Домашнє завдання: [1] с. 262...269, [2] с. 77...79

Лекція

з навчальної дисципліни Математичний аналіз

Тема Інтегрування методом заміни змінної.

Мета заняття ознайомити студентів з методом інтегрування заміни змінної, сформувати вміння обчислювати невизначений та визначений інтеграли методом підстановки.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН
опорний конспект

Час – 2 години

План проведення лекції

Структура лекції	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв	Включає в себе: <i>привітання, визначення присутності студентів на занятті</i>
2 Актуалізація опорних знань, перевірка вивченого матеріалу та мотивація навчальної діяльності студентів	10 хв	Включає в себе: <i>вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, перевірку попереднього матеріалу, формулювання мети лекції, огляд головних питань теми</i>
3 Основна частина (викладення навчальних питань лекції)	55 хв	Головне місце приділяється викладенню основного змісту матеріалу теми, його аналізу, узагальненню висунутих положень.
4 Заключна частина Домашнє завдання: [1], с. 336 [4], с. 79 [2], с. 83	10 хв	Включає в себе: <i>узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого на лекції матеріалу</i>

Література

1. Дубовик, В.П. Вища математика:[Текст] / В.П.Дубовик, І.І.Юрик.– К.: Ігнатекс-Україна, 2013. – 648 с.
2. Фартушний, І.Д. Математика для економістів. Конспект лекцій:[Текст] / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: І.Д.Фартушний.- К.:КПІ ім.Ігоря Сікорського,2019.-109с
4. Денисюк, В. П. Вища математика:[Текст] навч. посібник у 4-х ч./ В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч. 2. – 275 с.

Навчальні матеріали лекції

Метод підстановки (заміни змінної) Внесення функції під знак диференціала

Суть методу підстановки полягає у введенні нової змінної. При знаходженні інтегралу $\int f(x)dx$ застосовують підстановки таких двох видів:

1) $x = \varphi(t)$

$$2) \quad \omega(x) = t$$

Тут $\varphi(t)$, $\omega(x)$ - неперервно-диференційованні функції

У першому випадку $dx = \varphi'(t)dt$ і $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

Другу підстановку доцільно виконувати, якщо підінтегральний вираз можна подати у вигляді

$$f(x)dx = g(\omega(x))\omega'(x)dx,$$

тоді

$$\int f(x)dx = \int g(\omega(x))\omega'(x)dx = \int g(\omega(x))d\omega(x) = \int g(t)dt$$

У цьому випадку функція $\omega'(x)$ вводиться під знак диференціала $\omega'(x)dx = d(\omega(x)) = dt$

Підстановки слід підбирати так, щоб одержані інтеграли були табличними або зводились до простіших інтегралів.

Спільним в обох способах введення нової змінної є зворотний перехід від змінної t до змінної x .

Загальних методів підбору підстановок не існує. Але є широкі класи функцій, для яких будуть указані спеціальні типи підстановок.

Приклади розв'язання типових задач

Знайти інтеграли, використовуючи метод заміни змінної або внесення функції під знак диференціала.

$$1. \int x\sqrt{2-x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{2-x} = t \\ x = 2-t^2 \\ dx = -2tdt \end{array} \right\} = \int (2-t^2) \cdot t \cdot (-2t)dt = 2 \int (t^4 - 2t^2)dt =$$

$$\frac{2}{5}t^5 - \frac{4}{3}t^3 + C = \frac{2}{5}\sqrt{(2-x)^5} - \frac{4}{3}\sqrt{(2-x)^3} + C$$

$$2. \int \frac{dx}{1-e^x} = \left\{ \begin{array}{l} 1-e^x = t \\ x = \ln(1-t) \\ dx = \frac{dt}{t-1} \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t(t-1)} = \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} \right) dt = \int \frac{d(t-1)}{t-1} - \int \frac{dt}{t} =$$

$$\ln|t-1| - \ln|t| + C = \ln e^x - \ln|1-e^x| + C = x - \ln|1-e^x| + C$$

$$3. \int \sqrt{4-x^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} x = 2\sin t \\ dx = 2\cos t dt \\ \sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-4\sin^2 t} = 2\cos t \end{array} \right\} = \int 2\cos t \cdot 2\cos t dt =$$

$$4 \int \cos^2 t dt = 2 \int (1 + \cos 2t) dt = 2t + \sin 2t + C = \left\{ \begin{array}{l} \sin t = x/2 \\ t = \arcsin \frac{x}{2} \\ \sin 2t = 2\sin t \cos t \end{array} \right\} =$$

$$2\arcsin \frac{x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + C$$

Вміючи достатньо диференціювати і знаючи таблиці інтегралів, змінну можна не вводити, а зразу вносити відповідну функцію під знак диференціала. При цьому часто використовують такі перетворення диференціала:

$$dx = d(x + b), b - \text{ стала, } \quad xdx = \frac{1}{2}d(x^2) \quad \cos x dx = d(\sin x) \quad \frac{dx}{\sin^2 x} = -d(\operatorname{ctg} x)$$

$$dx = \frac{1}{a}d(ax + b), a, b - \text{ сталі, } \quad \frac{dx}{x} = d(\ln x) \quad \sin x dx = -d(\cos x) \quad \frac{dx}{\cos^2 x} = d(\operatorname{tg} x)$$

$$4. \int x\sqrt{1+x^2} dx = \left\{ xdx = \frac{1}{2}d(1+x^2) \right\} = \frac{1}{2} \int \sqrt{1+x^2} d(1+x^2) = \frac{1}{2} \int (1+x^2)^{\frac{1}{2}} d(1+x^2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (1+x^2)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3} \sqrt{(1+x^2)^3} + C$$

$$5. \int x^3 e^{-x^4} dx = \left\{ \begin{aligned} d(-x^4) &= -4x^3 dx \\ x^3 dx &= -\frac{1}{4}d(-x^4) \end{aligned} \right\} = -\frac{1}{4} \int e^{-x^4} d(-x^4) = -\frac{1}{4} e^{-x^4} + C$$

$$6. \int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx = \int \operatorname{arctg} x d(\operatorname{arctg} x) = \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2} + C$$

$$7. \int \operatorname{ctg} x dx = \left\{ \begin{aligned} \operatorname{ctg} x &= \frac{\cos x}{\sin x} \\ d \sin x &= \cos x dx \end{aligned} \right\} = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln |\sin x| + C$$

$$8. \int \frac{x^3 dx}{4+x^8} = \frac{1}{4} \int \frac{dx^4}{4+x^8} = \frac{1}{4} \int \frac{dx^4}{2^2+(x^4)^2} = \frac{1}{8} \operatorname{arctg} \frac{x^4}{2} + C$$

$$9. \int \frac{1-x+x^2}{\sqrt{(1+x^2)^3}} dx = \int \frac{(1+x^2)-x}{\sqrt{(1+x^2)^3}} dx = \int \frac{1+x^2}{\sqrt{(1+x^2)^3}} dx - \int \frac{xdx}{\sqrt{(1+x^2)^3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{\sqrt{(1+x^2)^3}} = \ln |x + \sqrt{1+x^2}| - \frac{1}{2} \int (1+x^2)^{-\frac{3}{2}} d(1+x^2) = \ln |x + \sqrt{1+x^2}| - \frac{1}{2} \frac{(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C = \ln |x + \sqrt{1+x^2}| + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + C$$

$$10. \int \frac{x+(\operatorname{arcsin} 2x)^3}{\sqrt{1-4x^2}} dx = \int \frac{xdx}{\sqrt{1-4x^2}} + \int \frac{(\operatorname{arcsin} 2x)^3}{\sqrt{1-4x^2}} dx = -\frac{1}{8} \int \frac{d(1-4x^2)}{\sqrt{1-4x^2}} + \frac{1}{2} \int (\operatorname{arcsin} 2x)^3 d \operatorname{arcsin} 2x = -\frac{1}{4} \sqrt{1-4x^2} + \frac{1}{8} (\operatorname{arcsin} 2x)^4 + C$$

Питання та завдання до контролю знань студентів

1. Дайте означення первісної функції.
2. Назвіть властивості первісних.
3. Дайте означення невизначеного інтегралу.
4. Назвіть таблицю первісних.
5. Які методи інтегрування вам відомі?
6. У чому полягає метод інтегрування заміною?

Домашнє завдання: [1] с. 198...201, [2] с. 79

Лекція

з навчальної дисципліни Математичний аналіз

Тема Числовий ряд. Степеневий ряд. Умови їх збіжності.

Мета заняття ознайомити студентів з поняттям числового ряду та його властивостями, сформувати вміння досліджувати ряди на збіжність за допомогою властивостей.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН
опорний конспект

Час – 2 години

План проведення лекції

Структура лекції	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв	Включає в себе: привітання, визначення присутності студентів на занятті
2 Актуалізація опорних знань, перевірка вивченого матеріалу та мотивація навчальної діяльності студентів	10 хв	Включає в себе: вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, перевірку попереднього матеріалу, формулювання мети лекції, огляд головних питань теми
3 Основна частина (викладення навчальних питань лекції)	55 хв	Головне місце приділяється викладенню основного змісту матеріалу теми, його аналізу, узагальненню висунутих положень.
4 Заключна частина Домашнє завдання: [7], с. 6...14 [1], с. 494, 507	10 хв	Включає в себе: узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого на лекції матеріалу

Література

1. Дубовик, В.П. Вища математика:[Текст] / В.П.Дубовик, І.І.Юрик.– К.: Ігнатекс-Україна, 2013. – 648 с.

7. Денисюк, В. П. Вища математика:[Текст] навч. посібник у 4-х ч./ В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч. 3. – 275 с

Навчальні матеріали лекції

Нехай задано послідовність дійсних чисел

$$\{u_n\} = \{u_1, u_2, \dots, u_n, \dots\}.$$

Числовим рядом (або просто рядом) називають вираз

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

Числа $u_1, u_2, \dots$ називають членами ряду; u_n — загальний член ряду.

Ряд вважають заданим, якщо відома залежність загального члена ряду від номера n , тобто $u_n = f(n)$.

Суму

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

перших n членів ряду називають n -ю частиною сумою ряду.

Якщо існує скінченна границя $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, то ряд називають збіжним, а число S — його сумою.

Якщо границя $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ не існує або $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$, то ряд називають розбіжним. Такий ряд суми не має.

Різницю

$$r_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots$$

називають n -м залишком ряду.

Розглянемо ряд геометричної прогресії (або *геометричний ряд*):

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} \quad (a \neq 0).$$

При $q = 1$ ряд розбіжний. Нехай $q \neq 1$, тоді

$$S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{a}{1 - q} - \frac{aq^n}{1 - q}.$$

Знайдемо границю цієї суми залежно від значення q :

1) якщо $|q| < 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$, тому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1 - q},$$

ряд збіжний і його сума

$$S = \frac{a}{1 - q};$$

2) якщо $|q| > 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty$, тому $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$, ряд розбіжний;

3) при $|q| = 1$ ряд набирає вигляду

$$a - a + a - a + \dots + (-1)^{n+1}a + \dots$$

і є розбіжним.

Висновок. Ряд геометричної прогресії

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} \quad (a \neq 0)$$

збігається за умови $|q| < 1$ і розбігається, якщо $|q| \geq 1$.

У теорії рядів особливе місце посідає ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

який називають *гармонічним* рядом.

Властивості числових рядів

1. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збіжний і його сума дорівнює S , то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} Cu_n$, також збіжний і його сума дорівнює CS ($C = \text{const}$).

Якщо ж ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ розбігається і $C \neq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} Cu_n$ також розбігаються.

2. Якщо числові ряди $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, збіжні і S_u та S_v — їхні суми відповідно, тоді збіжні також ряди $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ і їхні суми дорівнюють $S_u \pm S_v$ відповідно.

Зауваження. Сума (різниця) збіжного і розбіжного рядів є розбіжний ряд. Сума (різниця) двох розбіжних рядів може бути як збіжним, так і розбіжним рядом.

3. На збіжність ряду не впливає відкидання чи приєднання до нього скінченної кількості членів.

4. Ряд (1.1) збіжний (розбіжний) тоді і тільки тоді, коли збіжний (розбіжний) довільний його залишок. Крім того, якщо ряд збігається, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_{n+1} + u_{n+2} + \dots) = 0$$

Необхідна ознака збіжності числового ряду

Часто потрібно встановити не суму ряду, а лише його збіжність чи розбіжність. У таких випадках відшукування частинної суми S_n стає не ефективним. Існує ряд ознак, які дають можливість вивчити ряд на збіжність без використання суми S_n . Важливу інформацію про поведінку ряду може дати зокрема, необхідна ознака збіжності числового ряду.

Теорема 1. (необхідна ознака збіжності). Якщо ряд збігається, то його загальний член u_n прямує до нуля, тобто

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

Наслідок (достатня ознака розбіжності ряду). Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$ або ця границя не існує, то ряд розбігається

Достатні ознаки збіжності знакододатних рядів

Ряди з невід'ємними членами називають *знакододатними*. Для дослідження збіжності таких рядів найчастіше використовують ознаки порівняння, Д'Аламбера, радикальну та інтегральну ознаки Коші.

На практиці більш ефективною є гранична ознака порівняння.

Теорема 3 (гранична ознака порівняння). Нехай $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ — ряди з додатними членами. Якщо існує скінченна, відмінна від нуля, границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = k \quad (0 < k < \infty),$$

то вказані ряди одночасно збіжні або розбіжні.

Зауваження. При дослідженні рядів на збіжність корисно знати, що показникова функція a^n ($a > 1$) при $n \rightarrow \infty$ зростає швидше, ніж степенева функція n^a ($a > 0$), а степенева функція n^a ($a > 0$) зростає швидше за логарифмічну функцію $\ln n$, тобто

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n^a} = \infty \quad (a > 1, a > 0), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a}{\ln n} = \infty \quad (a > 0).$$

Ознака Д'Аламбера

Основний недолік застосування ознак порівняння полягає в необхідності вибору еталонного ряду, тобто ще перед дослідженням ряду ми повинні передбачити його поведінку. Ознака Д'Аламбера дає можливість для певних типів рядів розв'язати задачу про збіжність, використовуючи лише дії над самим рядом.

Теорема 4 (ознака Д'Аламбера). Нехай $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ — ряд з додатними членами. Якщо існує границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l,$$

то ряд збігається при $l < 1$ і розбігається при $l > 1$ (тут l може бути рівним ∞).

Якщо $l = 1$ у то ряд може бути збіжним або розбіжним, і для розв'язання питання про збіжність ряду потрібні додаткові дослідження.

Радикальна ознака Коші

У деяких випадках, наприклад, коли загальний член ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ можна подати у вигляді степеня деякого виразу, тобто $u_n = (f(n))^n$, дослідження збіжності ряду зручно проводити за допомогою радикальної ознаки Коші. Її формулювання має певну схожість із формулюванням ознаки Д'Аламбера.

Теорема 5 (радикальна ознака Коші). Якщо для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ з додатними членами існує скінченна або нескінченна границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l,$$

то цей ряд збіжний, якщо $l < 1$, і розбіжний, якщо $l > 1$.

У випадку $l = 1$ питання про збіжність ряду залишається відкритим.

Зауваження.

1. Ознакою Д'Аламбера доцільно користуватися насамперед тоді, коли загальний член ряду містить $n!$ або показникову функцію a^n .

2. Існують випадки, коли застосування ознаки Д'Аламбера не приводить до результату. Так, застосовуючи цю ознаку до ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_m(n)}{Q_k(n)}$, де $P_m(n), Q_k(n)$ — многочлени степенів m і k відповідно, завжди дістають $l = 1$, що потребує додаткового дослідження, зазвичай застосування ознак порівняння.

3. При використанні радикальної ознаки Коші користуються відомими границями:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 0),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{P_m(n)} = 1 \quad (P_m(n) \text{ — многочлен степеня } m).$$

Інтегральна ознака Коші.

Теорема 6 (інтегральна ознака Коші). Нехай члени знакододатного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ є значеннями деякої неперервної монотонно спадної на проміжку $[1; \infty)$ функції $f(x)$ для цих значень аргументу x , тобто $u_1 = f(1), u_2 = f(2), \dots, u_n = f(n), \dots$. Тоді ряд і невластний інтеграл $\int_1^{\infty} f(x) dx$ одночасно збіжні або розбіжні.

Висновок. Узагальнений гармонічний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots$$

збігається для $p > 1$ і розбігається для $p \leq 1$.

Теорема 8 Нехай числовий ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

є знакозмінним (тут числа $u_1, u_2, \dots$ можуть мати довільний знак).

Питання та завдання до контролю знань студентів

1. Дайте означення числового ряду.
2. Що таке сума ряду?
3. Дайте означення геометричного ряду.
4. Назвіть властивості числових рядів.
5. Який ряд називають гармонійним?
6. Назвіть необхідну ознаку збіжності числового ряду.
7. Назвіть достатню ознаку збіжності числового ряду.
8. Назвіть ознаку Д'Аламбера.
9. Назвіть радикальну ознаку Коші.
10. Назвіть інтегральну ознаку Коші.

Домашнє завдання: [1] с. 9...14

Лекція

з навчальної дисципліни Математичний аналіз

Тема Степеневий ряд і умови збіжності.

Мета заняття ознайомити студентів з поняттям степеневому ряду, сформулювати вміння досліджувати степеневі ряди на збіжність, користуючись ознаками.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН
опорний конспект

Час – 2 години

План проведення лекції

Структура лекції	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв	Включає в себе: <i>привітання, визначення присутності студентів на занятті</i>
2 Актуалізація опорних знань, перевірка вивченого матеріалу та	10 хв	Включає в себе: <i>вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, перевірку</i>

мотивація навчальної діяльності студентів		<i>попереднього матеріалу, формулювання мети лекції, огляд головних питань теми</i>
3 Основна частина (викладення навчальних питань лекції)	55 хв	Головне місце приділяється викладенню основного змісту матеріалу теми, його аналізу, узагальненню висунутих положень.
4 Заключна частина Домашнє завдання: [7], с. 43...49 [1], с. 519	10 хв	Включає в себе: узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого на лекції матеріалу

Література

1. Дубовик, В.П. Вища математика:[Текст] / В.П.Дубовик, І.І.Юрик.– К.: Ігнатекс-Україна, 2013. – 648 с.
7. Денисюк, В. П. Вища математика:[Текст] навч. посібник у 4-х ч./ В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч. 3. – 275 с

Навчальні матеріали лекції

Функціональний ряд вигляду

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n ,$$

де $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ — дійсні числа, називають *степеневим* рядом.

Теорема 3 (Абеля). Якщо степеневий ряд вигляду (1.10) збігається для $x = x_1 \neq 0$, то він абсолютно збіжний для всіх значень x , що задовольняють нерівність $|x| < |x_1|$ (рис. 1.3, а).

Отже, модуль кожного члена ряду не перевищує відповідного члена збіжного ряду геометричної прогресії. Тому за ознакою порівняння для всіх x , що задовольняють нерівність $|x| < |x_1|$, ряд є абсолютно збіжним.

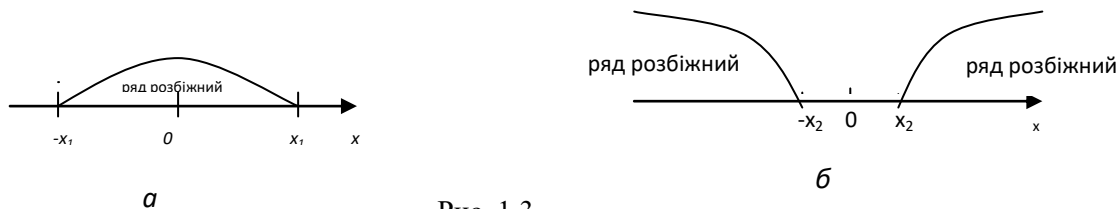


Рис. 1.3

Наслідок. Якщо ряд розбігається при $x = x_2$, то він розбігається для всіх значень x , що задовольняють нерівність $|x| > |x_2|$ (рис. 1.3, б).

Теорема Абеля характеризує множини точок збіжності та розбіжності степеневому ряду. Можливі такі три випадки:

1. ряд збіжний лише в одній точці $x = 0$;
2. ряд збіжний для будь-якого $x \in (-\infty; \infty)$;
3. існує таке додатне число R , що при $|x| < R$ ряд абсолютно збіжний, а при $|x| > R$ —розбіжний (рис. 1.4).



Число R називають *радіусом збіжності* степеневого ряду. Зв'язок між радіусом та інтервалом збіжності степеневих рядів наведено в табл. 1.11.

Таблиця 1.1

Радіус збіжності R	Інтервал збіжності степеневого ряду (3.2)	Інтервал збіжності степеневого ряду (3.3)
$R = 0$	$x = 0$	$x = x_0$
$R = \infty$	$(-\infty; \infty)$	$(-\infty; \infty)$
$0 < R < \infty$	$(-R; R)$	$(-R + x_0; R + x_0)$

Отже, радіус збіжності можна визначити за формулою

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

Аналогічно, скориставшись радикальною ознакою Коші, дістають ще одну формулу для обчислення радіуса збіжності

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}}$$

Зауваження.

1. У разі, коли $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0$, радіус збіжності $R = \infty$.

2. Якщо степеневий ряд містить не всі степені x , тобто є неповним, то радіус збіжності безпосередньо за формулами знаходити не можна. У цьому випадку інтервал збіжності визначають за ознакою Д'Аламбера (чи Коші) для ряду, складеного з модулів членів заданого ряду, або ж, виконавши відповідну заміну (якщо це можливо), зводять неповний степеневий ряд до повного, після чого знаходять радіус збіжності.

3. Якщо $0 < R < \infty$, то в цьому разі степеневий ряд у точках, які є кінцями інтервалу збіжності, може збігатися або розбігатися. Підставляючи по

черзі у заданий ряд точки $x = \pm R$ (чи $x = -R + x_0; R + x_0$), досліджують утворені числові ряди на збіжність. У результаті область збіжності степеневому ряду може відрізнятись від інтервалу збіжності не більше ніж двома точками. Іншими словами, область збіжності степеневому ряду — це інтервал збіжності $(-R; R)$ доповнений, можливо, двома точками $x = \pm R$ (чи $x = -R + x_0; R + x_0$).

Властивості степеневих рядів

1. Степеневий ряд (1.10) абсолютно і рівномірно збігається на будь-якому відрізку $[-a; a]$, який цілком міститься в інтервалі збіжності $(-R; R)$.
2. Сума $S(x)$ степеневому ряду неперервна функція на проміжку $(-R; R)$.
3. (Про почленне диференціювання.) Степеневий ряд усередині інтервалу збіжності можна почленно диференціювати. Ряд, утворений диференціюванням, має той самий інтервал збіжності, причому, якщо

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n,$$

то

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

4. (Про почленне інтегрування.) На будь-якому відрізку, що належить інтервалу збіжності $(-R; R)$, степеневий ряд можна почленно інтегрувати.

Зокрема, якщо відрізок інтегрування $[0; x] \in (-R; R)$ і $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, то

$$\int_0^x S(x) dx = \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x a_n x^n dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

причому утворений після інтегрування ряд має той самий інтервал збіжності.

5. Степеневі ряди $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ та $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ із радіусами збіжності R_1 та R_2 відповідно можна почленно додавати, віднімати, перемножувати. Радіус збіжності утворених рядів не менший, ніж менше з чисел R_1 та R_2 .

Ці властивості використовують для розвинення функцій у ряди і їх застосування для обчислення наближених значень функцій і інтегралів.

Питання та завдання до контролю знань студентів

1. Дайте означення степеневому ряду.
2. Назвіть теорему Абеля.

3. Що таке радіус збіжності?
4. Назвіть властивості степеневих рядів.

Домашнє завдання: [1] с. 43...49